

I-470 伊藤形確率微分方程式を用いた吊橋の動的安定解析法

鳥取大学工学部 正会員○松保重之

鳥取大学工学部 正員員 白木 渡

鳥取大学工学部 正員員 高岡宣善

1. まえがき 不規則な外力が作用する構造物の動的安定・不安定の問題に対し安定領域を決定する場合には、伊藤形の確率微分方程式の理論に基づいた解析が有効である。本研究では、吊橋の風荷重による動的安定解析を伊藤形の確率微分方程式の理論を用いて行う方法について述べる。従来の伊藤形確率微分方程式の理論を用いた吊橋の動的安定問題に関する研究¹⁾は、風荷重を白色雑音として取り扱っていたが、本研究では有色雑音である実際の風荷重を伊藤形確率微分方程式の理論に用いることのできるようにモデル化し、その結果を吊橋の動的安定解析に適用できるようにした。

2. 吊橋の動的安定解析の手法 図1に示すような断面を有する吊橋の運動方程式は、一般に式(1), (2)で与えられる。式中、 $L_b(t)$, $M_b(t)$ は一般化されたバフエッティング荷重であり、時間 t のみの関数である。 $L_{s-e}(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha})$, $M_{s-e}(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha})$ は一般化された自励荷重であり、鉛直変位 h 、ねじれ角 α およびそれらの導関数 $\dot{h}$, $\dot{\alpha}$ の関数である。さらに、 M, I はそれぞれ、一般化質量、慣性モーメント、 ξ_h, ξ_α は h, α に対する減衰比、 ω_h, ω_α は h, α に対する固有円振動数である。

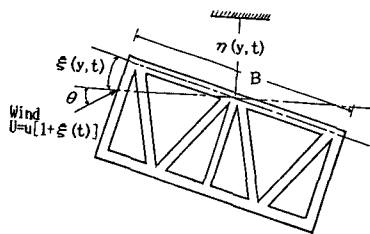


図1 吊橋の断面

本研究では、吊橋の動的安定問題として1自由度ねじれフラッターを考える。構造的にはねじれ振動が卓越して鉛直変位との連成は無視できると考えられる場合であっても、実際には空気力学的な連成の効果を無視することはできない。しかし、ここでは解析の簡単のために、式(2)のねじれ振動のみに限定できるものと仮定する。(応答量でなく)安定領域のみを求める場合には、バフエッティング荷重は考慮しなくてよいので、式(2)は式(3)のように書くことができる。式中、 X_α と $\frac{\partial C_k}{\partial \alpha}$ は空力学定数、 $X_{\max}$ はインディシャル関数であり、式(4)で近似的に与えられる²⁾。 c_1, c_3, R_1, R_3 は、いずれも定数である。式(3)において、不規則に変動する風速 $U(t)$ を平均値 u とそのまわりの変動成分 $u\xi(t)$ とに分けて $U(t) = u[1+\xi(t)]$ とし、また近似 $\{U(t)\}^2 = u^2[1+2\xi(t)]$ を用いると、置換 $x_1 = \alpha$, $x_2 = \dot{\alpha}$ のもとに連立微分方程式(5)を得る。

$$M(\ddot{h} + 2\xi_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h) = L_b(t) + L_{s-e}(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}) \quad (1)$$

$$I(\ddot{\alpha} + 2\xi_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha) = M_b(t) + M_{s-e}(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}) \quad (2)$$

$$I(\ddot{\alpha} + 2\xi_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha) = \frac{1}{2} \rho (2B)^2 \frac{\partial C_k}{\partial \alpha} [X_\alpha U^2(t) \dot{\alpha}(t) + U^2(t) \alpha(t) + \int_{-\infty}^t U^2(\tau) \{X_{\max}(t-\tau) - 1\} \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} d\tau] \quad (3)$$

$$X_{\max}(t) = c_1 \cdot \exp(-R_1 t) + c_3 \cdot \exp(-R_3 t) \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_\alpha^2 x_1 - 2\omega_\alpha \xi_\alpha x_2 + A_\alpha (x_3 + x_4) + 2(A_\alpha x_1 + \omega_\alpha A_\gamma x_2) \xi(t) \\ \dot{x}_3 &= c_1 \{1 + 2\xi(t)\} x_2 - R_1 x_3 \\ \dot{x}_4 &= c_3 \{1 + 2\xi(t)\} x_2 - R_3 x_4 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} A_\alpha &= \frac{\rho U^2 B^2}{I} \frac{\partial C_k}{\partial \alpha}, \quad A_\gamma = \frac{A_\alpha X_\alpha}{\omega_\alpha} \\ \omega_\alpha^2 &= \omega_\alpha^2 - A_\alpha, \quad \xi_\alpha = \frac{2\omega_\alpha \xi_\alpha \alpha - A_\alpha X_\alpha}{2\omega_\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$S_u(\lambda) = 0.4751 \frac{\sigma_u^2}{\beta} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi\beta} \right)^2 \right]^{-5/6} \quad (7)$$

$$S_w(\lambda) = \frac{S_o}{\lambda^2 + b^2} \quad (8)$$

$$\beta = 0.001169 \frac{U_{10} \alpha}{K r^{1/2}} \left(\frac{z}{10} \right)^{2m\alpha-1}, \quad \sigma_u^2 = 6Kr U_{10}^2 \quad (9)$$

式(5)のマトリックス表示式を伊藤形確率微分方程式と考えると $\xi(t)$ は白色雑音と解釈されるが、実際の風速の変動成分 $u\xi(t)$ は式(6)(日野式)で表わされるような(片側)スペクトル密度 $S_u(\lambda)$ を有する有色雑音である。ここに、 λ は円振動数、 σ_u^2 は風速の分散、 z は高度、 K_r は表面粗度係数、 U_{10} は $z=10m$ での基本風速、 α は風速の鉛直分布をべき法則で表わした時のべき数である。本研究では、この日野式を1階線形フィルター式(7)で与えられる応答 $w(t)$ の(両側)スペクトル密度 $S_w(\lambda)$ (式(8))で近似する。ここに、一定値 S_o は $\xi(t)$ のスペクトル密度、 b は一定値である。式(6), (8)を比較すると関係式(9)が成立する。式中、 $k=1.340$ は式(8)による分散が風速の分散 σ_u^2 に等しくなるように定めた修正係数である。

式(5),(7)で表わされる動的系を状態空間ベクトル $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}^T$ (上付き添字Tは転置記号を表わし、また $x_5 = w$ である)を用いて伊藤形の表示を行うと、式(10)を得る。ここに、 $B(t)$ は標準ブラウン過程であり、 $\sigma dB(t) = \xi(t)dt$, $\sigma^2 = S_0$ である。式(10)に物理的整合性をとるためのWong-Zakaiの修正を施し、さらに伊藤-Dynkinの公式を用いてモーメント方程式を導くと、1,2次モーメントに対してそれぞれ式(11),(12)を得る。式中、例えば $m_{01000} = E[x_2]$, $m_{11000} = E[x_1 x_2]$ である。式(11),(12)において、行列Fあるいは行列Aの固有値の実数部分が1つでも正である時、系は不安定と判別される。

3. 数値計算例

2. で述べた方法によってねじれフラッターの解析を行う前に吊橋のガスト応答解析による風速モデルの検証を行う。ガスト応答解析においては、鉛直方向振動のみを考え、また式(6)による計算結果と式(8)による計算結果の比較を行うためにスペクトル解析を行う。この時、対象とする基本式は式(1)において自励荷重 L_{s-e} を除いたものとなり、ガスト応答のスペクトル密度 $S_h(\lambda)$ は式(13)で与えられる²⁾。

$$dx = Hxdt + \sigma \{Gx + (0, 0, 0, 0, 1)^T\} dB(t) \quad (10)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0\xi_0 & A_0 & A_0 & 0 \\ 0 & C_1 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2A_0 & 2\omega_0 A_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= FM_1, & M_1 &= \{m_{10000}, m_{01000}, m_{00100}, m_{00010}, m_{00001}\}^T \\ \dot{M}_2 &= AM_2, & M_2 &= \{m_{20000}, m_{02000}, m_{00200}, m_{00020}, m_{00002}, \\ & & & m_{11000}, m_{10100}, m_{10010}, m_{10001}, m_{01100}, \\ & & & m_{01010}, m_{01001}, m_{00110}, m_{00011}\}^T \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} S_h(\lambda) &= |H_h(\lambda)|^2 \cdot S_L^F(\lambda) \\ |H_h(\lambda)|^2 &= M^{-2} \omega_n^{-4} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{2\xi_n \lambda}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{-1} \\ S_L^F(\lambda) &= S_L(\lambda) \cdot |J(\lambda)|^2 \cdot |r(\lambda)|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

$H_h(\lambda)$ は振動数応答関数、 $S_L^F(\lambda)$ は一般化された揚力のスペクトル密度、 $S_L(\lambda)$ は揚力のスペクトル密度、 $|J(\lambda)|^2$ は結合アクセプタンス、 $|r(\lambda)|^2$ は空力学的アドミッタンスである。スパン $L=490\text{m}$ の Narragansett Bay 橋を対象として数値計算を行った^{1), 2)}。用いたパラメータ値は $B=16.4\text{m}$, $\xi_\alpha = \xi_n = 0.01$, $\rho = 1.226\text{kgf/m}^3$, $\alpha = 1/7$, $Kr = 0.003$, $z = 50\text{m}$, $\partial C_H / \partial \alpha = 0.93$, $\omega_n = 0.32\pi\text{rad/s}$, $\omega_\alpha = 0.74\pi\text{rad/s}$, $\theta = 0^\circ$, $dL/d\theta = 0.004314\text{kgf/rad}$, $C_L = 0.7$ である。 $u = 30\text{m/s}$ の時のガスト応答に対するスペクトル密度 $S_h(\lambda)$ を円振動数 λ に対して示すと図2となる。図中、 σ_1^2 は日野式(6)によるガスト応答の分散、 σ_2^2 は $k=1$ (無修正) の時の式(8), (9)によるガスト応答の分散、 σ_3^2 は $k=1.340$ の時の式(8), (9)によるガスト応答の分散を示している。この図より、ガスト応答解析に対しては風速のスペクトル式(6)を式(8), (9)で近似しても良いであろうことが分かる。本研究では、動的安定解析においても式(8), (9)の近似が適用できるものと仮定する。

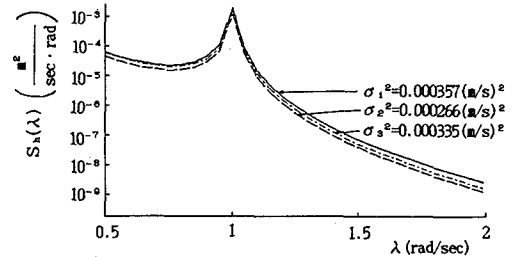


図2 ガスト応答解析の結果

図3は、ねじれフラッターの発振風速 u と基本風速 U_{10} との関係を示したものである。図の縦軸は、基本式(3)あるいは(5)において風速の変動成分 $u\xi(t)$ が無い場合に得られるフラッター発振風速 $U_{cr} = 27.7\text{m/s}$ で除して無次元化している。図の実線より下側が安定領域、上側が不安定領域であることを示している。図より、1次モーメントの安定領域は2次モーメントの安定領域を含んでいる、すなわち2次モーメントで安定であるためには1次モーメントで安定である必要があることが分かる。また、基本風速が大きくなれば、安定領域が小さくなることもこの図から分かる。

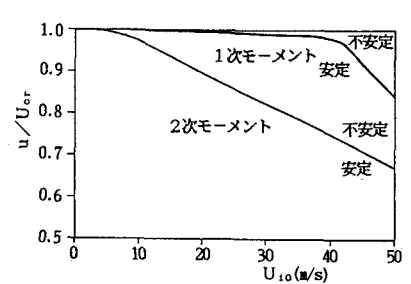


図3 フラッターに対する解析結果

参考文献

- 1) Y.K.Lin et al.: Stability of Bridge Motion in Turbulent Winds, J.Struct.Mech., 8(1), pp.1-15, 1980.
- 2) J.G.Beliveau et al.: Motion of Suspension Bridge Subject to Wind Loads, J.Struct.Div.ASCE, Vol.103(ST6), pp.1189-1205, 1977.