I-469　確率特性を有する構造物の動的応答解析法に関する基礎的研究

宮崎大学大学院　学生会員　江藤祐昭
宮崎大学工学部　正 会 員　原田隆典

１）．まえがき：　確率有限要素法による静的問題ではいわゆる摂動法によって良い近似解が得られるが、動的問題ではいろいろと問題が残されている。そこで、本研究では主に動的問題を取り扱う新しい方法を提案し、１自由度振動系においてモンテカルロ法や摂動法によるものと比較・検討する。

２）．摂動法：　平均値＝０の確率変数ａの関数である動的係数マトリックスＤ(a)および外力Ｆ(a)をもつ線形連立１次方程式を考える。

$$D(a)\cdot X(a)=F(a) \tag{1}$$

ａ＝０の場合は確定的な係数をもつ線形連立１次方程式となる。Ｄ(a)，Ｘ(a)，Ｆ(a)をａ＝０の回りにテイラー展開し、第３項以降を無視すると、式（１）の解Ｘ(a)の平均値と共分散はよく知られているように次のように与えられる。

$$E[X(a)]=X^{0},\ \mathrm{Cov}[X(a)]=\sum_{i}\sum_{j}(X_i{}^{I})^{*T}\cdot X_j{}^{I}\cdot E[a_i{}^{*T}\cdot a_j] \tag{2}$$

ここに、＊は共役複素数，Ｔは転置を意味する。また、

$$X^{0}=[D(0)]^{-1}\cdot F(0),\ X_i{}^{I}=[D(0)]^{-1}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial a_i}\bigg|_{a=0}-\frac{\partial D}{\partial a_i}\bigg|_{a=0}\cdot X^{0}\right) \tag{3}$$

であり、Ｆ(a)＝Ｆの場合には、式（３）で $\frac{\partial F}{\partial a}=0$ とする。

３）．繰り返し平均法：　簡単のため、Ｆ(a)＝Ｆの場合について示す。Ｄ(a)を次のように、その大きさにより３つに分ける。

$$D(a)=D(0)+D(a)^{I}+D(a)^{II},\ D(0)>D(a)^{I}>D(a)^{II} \tag{4}$$

また、確定的係数を持つ場合の解Ｘ^{0}は次式を満足するものとする。

$$D(0)\cdot X^{0}=F \tag{5}$$

式（４）と式（５）より解Ｘ(a)は次のように表すことができる。

$$X(a)=X^{0}-[D(0)]^{-1}\cdot\{D(a)^{I}+D(a)^{II}\}\cdot X(a) \tag{6}$$

式（６）において、右辺第２項の係数の固有値の絶対値が１以下の場合には、繰り返し計算により収束解Ｘ(a)を得ることができる。Ｄ(a)^{II}のオーダー以降の解を無視すると、Ｘ(a)の平均値、および共分散は次のように与えることができる。

$$E[X(a)]=M^{-1}\cdot F,\ \mathrm{Cov}[X(a)]=E[X(a)]^{*T}\cdot E[\Delta T(a)^{*T}\cdot\Delta T(a)]\cdot E[X(a)] \tag{7}$$

ここに、

$$M=D(0)+E[D(a)^{I}]+E[D(a)^{I}]\cdot[D(0)]^{-1}\cdot E[D(a)^{I}]$$
$$+E[D(a)^{II}]-E[D(a)^{I}\cdot[D(0)]^{-1}\cdot D(a)^{I}] \tag{8a}$$

$$\varDelta T(a)=M^{-1}\cdot\{\varDelta M(a)+\varDelta M(a)\cdot M^{-1}\cdot\varDelta M(a)\} \tag{8b}$$

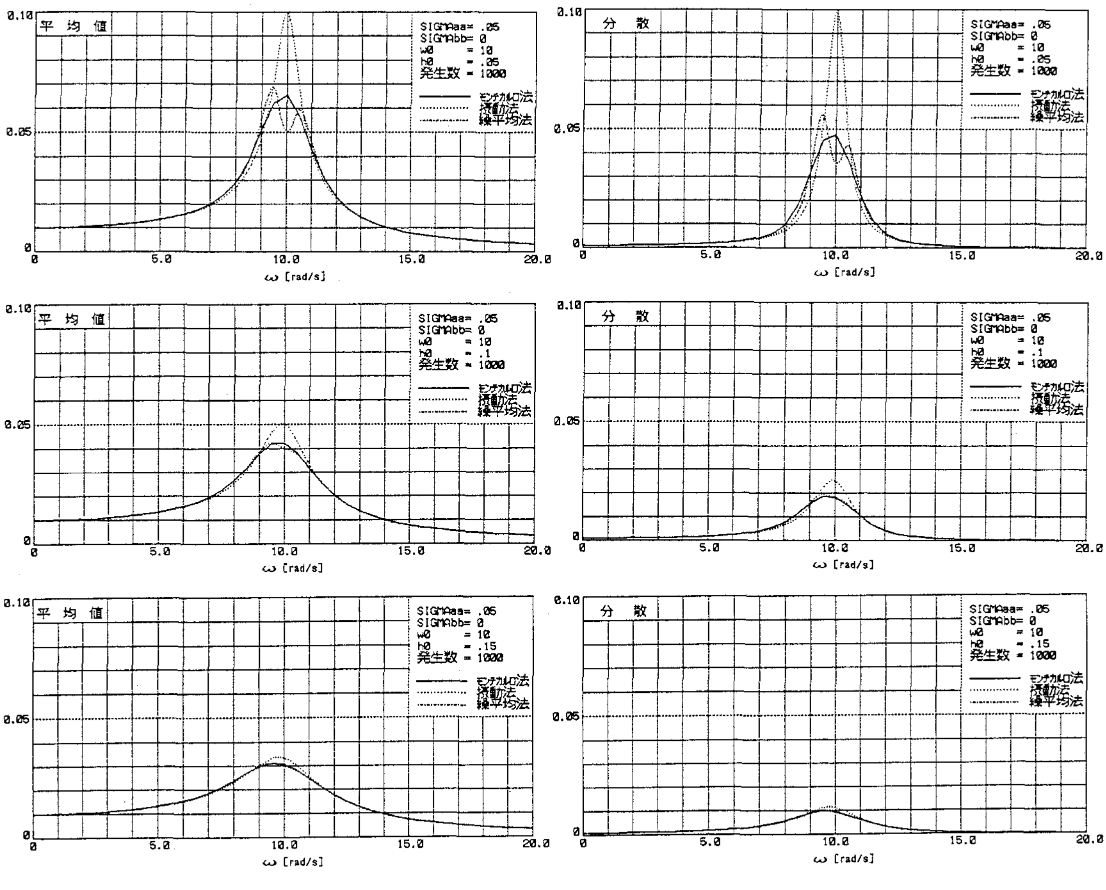
$$\varDelta M(a)=M-D(a) \tag{8c}$$

４）.１自由度振動系における数値計算例：　減衰定数h_0のばらつきに対する応答のばらつきはあまり大きくないため、ここでは固有振動数のばらつきのみを検討する。したがって、式（１）のD(a)は、

$$D(a)=-\omega^2+i2h_0\omega_0(1+a)\omega+\omega_0^2(1+a)^2 \tag{9}$$

ここにaは平均値が０，分散が$\sigma_{aa}{}^2$の確率変数とする。数値計算結果は、応答X(a)の平均値の絶対値$|E[X(a)]|$（伝達関数の平均値）と標準偏差$\sqrt{Var[X(a)]}$である。図−１は確率変数の標準偏差を５％とし減衰定数を変化させたときのモンテカルロ法、摂動法、繰り返し平均法による結果を示したものである。

５）.まとめ：　数値計算例では、１自由度振動系を扱ったが、繰り返し平均法は摂動法に比べよい近似を与えることがわかった。固有円振動数における確率変数の標準偏差と減衰定数の比（σ_{aa}/h_0）は重要なパラメータで、その比が小さくなるに従って３つの方法による解析値が似通ってくる。



［図−１］