

信州大学 正 員 ○石川 清志

信州大学 学生員 赤堀 裕

信州大学 正 員 夏目正太郎

衝撃荷重を受ける二、三次元弾性体の動的問題はH.Lambを始め幾多の研究者によって解かれてきている。この運動方程式は連立方程式と表されるが、連立方程式を直接扱わず、変位ポテンシャル(応力関数)を導入することによって、連立性が排除された波動方程式を解く問題に置き換えて行われている。また、波動方程式の解析には、時間に対して、積分変換(Laplace変換)が導入され、空間のみに対する微分方程式を得、境界条件によって解かれている。しかしながら、積分変換を導入した式形は簡潔に表されるものの、逆変換の積分が特異点を含む複素積分となり相当複雑になる。

本研究の目的は、三次元軸対称Voigt型粘弾性体の過渡応力波伝播問題に対する一解析法を提案するものである。これは、簡単な積分変換(空間に対して)と変数分離の適用で、連立偏微分方程式として表されるVoigt体の運動方程式が簡潔に、しかも厳密に展開され、境界条件及び初期条件のもとで直接的に解かれる一連の解析過程を明らかにする。

解析の特徴としては、円柱座標系に依存するHankel変換と、粘弾性体動的問題、すなわち、時間の1階微分演算子が含まれる運動方程式の解析に有用と思われるStokes法による変数分離の固有関数展開を適用することによって、連立偏微分方程式で表される運動方程式が、空間と時間の微分方程式に完全に分離され、それぞれ境界条件、及び初期条件のもとで直接的に解かれる。固有関数は弾性体の自由振動方程式から誘導される直交関数で、この固有値は弾性体の円振動数を表し、波長(積分演算子)によって変わる分散性を持つことになる。この結果により、Hankel逆変換は、直接積分が極めて困難になるものの、数値積分を用いるとすれば比較的簡単な問題として扱うことが出来る。

図-1に示すような円柱座標 (r, θ, z) で表される幅 $2h$ の無限厚板とし、表面自由境界の中央に、圧縮応力波が誘起される対称集中衝撃荷重が負荷されるとする。Voigt体の運動方程式は、Lamé定数 (λ, μ) で表された弾性体の運動方程式に対して、 λ, μ をそれぞれ $(\lambda + \lambda' \partial/\partial t), (\mu + \mu' \partial/\partial t)$ の演算子で置き換えたものに相当する。ただし λ', μ' は粘性係数、 t は時間である。無次元量: $\xi = r/h, \eta = z/h, \tau = c_2 t/h, \zeta = \epsilon c_2/h, b = \lambda/\mu (1 < b)$ を導入し、Voigt体の運動方程式、境界条件、および、初期条件(静止条件)をHankel変換すれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} (1 + \zeta \frac{\partial}{\partial \tau}) \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\xi}{\partial \eta^2} - \gamma^2 (2+b) \tilde{u}_\xi - \gamma (1+b) \frac{\partial \tilde{u}_\eta}{\partial \eta} \right] &= \frac{\partial^2 \tilde{u}_\xi}{\partial \tau^2} \\ (1 + \zeta \frac{\partial}{\partial \tau}) \left[(2+b) \frac{\partial^2 \tilde{u}_\eta}{\partial \eta^2} - \gamma^2 \tilde{u}_\eta + \gamma (1+b) \frac{\partial \tilde{u}_\xi}{\partial \eta} \right] &= \frac{\partial^2 \tilde{u}_\eta}{\partial \tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\eta = \pm 1: \tilde{\sigma}_{\eta\eta} = -\tilde{p}(\tau), \tilde{\sigma}_{\eta\xi} = 0 \quad (2)$$

$$\tau = 0: \tilde{u}_\xi = \tilde{u}_\eta = \frac{\partial \tilde{u}_\xi}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{u}_\eta}{\partial \tau} = 0 \quad (3)$$

ここで、記号 $\sim$ はHankel変換を表し、

$$\tilde{u}_\xi(\eta, \tau) = \int_0^\infty \xi u_\xi(\xi, \eta, \tau) J_1(\gamma \xi) d\xi, \tilde{u}_\eta(\eta, \tau) = \int_0^\infty \xi u_\eta(\xi, \eta, \tau) J_0(\gamma \xi) d\xi, \tilde{p}(\tau) = \int_0^\infty \xi p(\xi, \tau) J_0(\gamma \xi) d\xi \quad (4)$$

u_ξ, u_η は ξ, η 方向の変位、 $p(\xi, \tau)$ は分布直荷重、 ϵ は粘性係数($\epsilon = \lambda'/\lambda = \mu'/\mu$)、 $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ は横波伝播

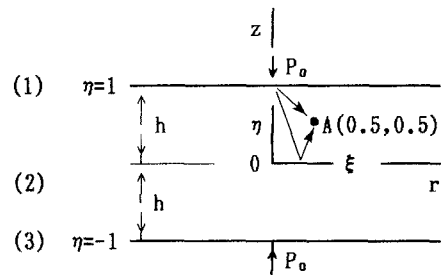


Fig. 1. Geometry.

速度、 ρ は質量、 J_0 、 J_1 は0、1次の第1種Bessel関数、 γ は演算子、 $\sigma_{\eta\eta}$ 、 $\sigma_{\eta\xi}$ は直及び剪断応力である。式(1)を式(2)の境界条件、及び式(3)の初期条件で解くにあたり、変位 $\bar{u}_\xi$ 、 $\bar{u}_\eta$ は次式と仮定する。

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_\xi(\eta, \tau) \\ \bar{u}_\eta(\eta, \tau) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\tau) \begin{bmatrix} \phi_m(\eta) \\ \psi_m(\eta) \end{bmatrix}, \text{ すると応力は } \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{\eta\xi}(\eta, \tau) \\ \bar{\sigma}_{\eta\eta}(\eta, \tau) \end{bmatrix} = \frac{\mu}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \zeta \frac{d}{d\tau}\right) A_m(\tau) \begin{bmatrix} \Phi_m(\eta) \\ \Psi_m(\eta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 A_m は任意関数、 $\Phi_m(\eta) = \phi_m' - \gamma \phi_m$ 、

$\Psi_m(\eta) = (2+b)\phi_m' + \gamma b \phi_m$ である。ただし、記号 ' は η について1階微分を表す。そして、関数 ϕ_m 、 ψ_m は固有関数で次の連立常微分方程式を満足するものである。

$$\begin{cases} \phi_m'' - \gamma^2 (2+b)\phi_m - \gamma(1+b)\phi_m' = -\omega_m^2 \phi_m \\ (2+b)\phi_m'' - \gamma^2 \phi_m + \gamma(1+b)\phi_m' = -\omega_m^2 \phi_m \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 ω_m は任意定数(固有値)で弾性体の円振動数を意味する。これは、式(1)において、 $\zeta \rightarrow 0$ とおき、 $\bar{u}_r = \phi_m \exp(i\omega_m \tau)$ 、 $\bar{u} = \psi_m \exp(i\omega_m \tau)$ としたものに相当し、弾性体の振動方程式と見ることもできるからである。式(6)に対する境界条件は式(2)、(5)から

$$\eta = \pm 1: \Phi_m = 0, \Psi_m = 0 \quad (7)$$

をとることになる。式(6)の微分方程式において、 ϕ_m 、 ψ_m は式(7)の境界条件に対して、次の直交性の条件が成立する。

$$\int_{-1}^1 (\phi_m \phi_n + \psi_m \psi_n) d\eta = 0, \quad \omega_m \neq \omega_n \quad (8)$$

この条件を利用することによって、式(1)の運動方程式を ϕ_m 、 ψ_m で展開し、式(2)及び(7)の境界条件で解けば、次の結果を得る。

$$\omega_m^2 (A_m + \zeta \dot{A}_m) + \ddot{A}_m = -q_m(\tau), \quad (9)$$

$$\begin{cases} q_m(\tau) = h/\mu \cdot \bar{p}(\tau) [\phi_m(1) - \phi_m(-1)]/f_m \\ f_m = \int_{-1}^1 (\phi_m^2 + \psi_m^2) d\eta \end{cases} \quad (10)$$

ここで、記号 ' は τ について1階微分を表す。

式(9)は式(3)から $\tau=0: A_m = \dot{A}_m = 0$ の初期条件によって解かれ、 A_m は決定される。一方、 ϕ_m 、 ψ_m は式(6)の連立方程式を式(7)のもとで

解けば決定されるが、これらは γ に依存する固有値方程式の根 ω_m をとることになり、結局 ω_m は γ の関数 $\omega_m = \omega_m(\gamma)$ として得られる。 $\bar{u}_\xi$ 、 $\bar{u}_\eta$ 、 $\bar{\sigma}_{\eta\eta}$ 、 $\bar{\sigma}_{\eta\xi}$ は式(5)によって表されているから、これらに対するHankel逆変換の積分を行えば、変位、応力は求められる。図-2は、図-1の点A(0.5, 0.5)に注目した変位、応力の時間変動を示したもので、実線は $\zeta=0.001$ としたVoigt体、破線は弾性体($\zeta=0$)の挙動である。 $\tau=0.408$ は縦波の到達時間で、この付近から、変位は不連続的な様相で急激に立ち上がり、応力は波頭を表す。続いて $\tau=0.707$ では横波が到達し、更に、 $\tau=0.907$ では $\eta=0$ 面で反射した縦波の到達によって応力波頭が現れる。弾性体は顕著な変位の不連続性や尖頭応力波の形態に対し、Voigt体は緩慢な形態を表わし、およそ弾性体の運動の中心を通る。

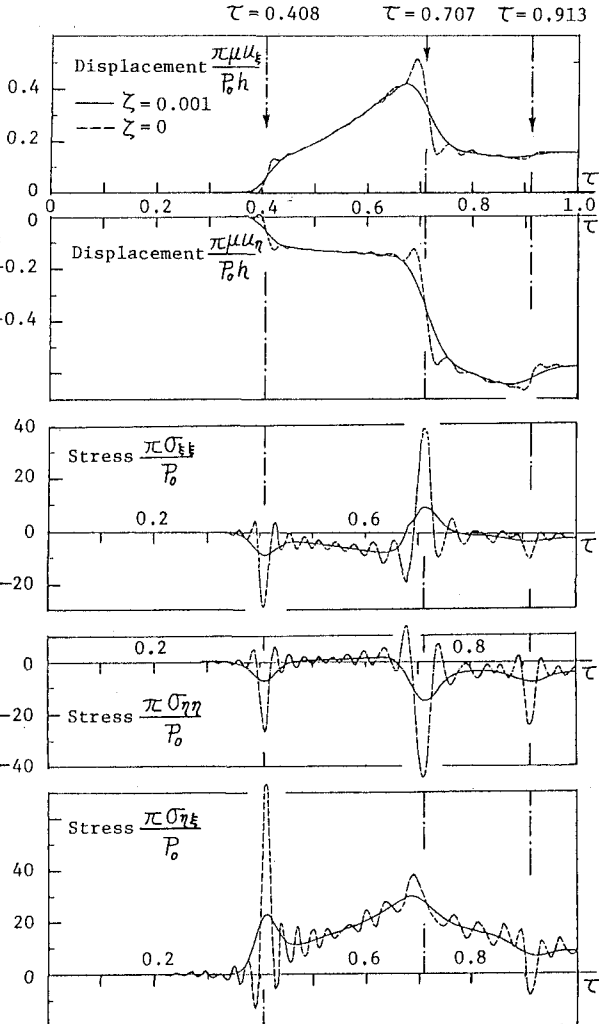


Fig. 2. Variation of Displacements and Stresses at A(0.5, 0.5) with Time.