I-466　緩和された適合条件に基づく時間領域のＦＥ－ＢＥ法のスキームについて

佐藤工業㈱　正会員　東平　光生
佐藤工業㈱　正会員　吉田　望
東京工業大学　総合理工　正会員　大町　達夫

1．はじめに

筆者らは、これまでに時間領域の弾性波動方程式に対するＦＥＭとＢＥＭの結合解法のスキームについて提案し、その有効性を検証してきた[1)2)]。この方法では、ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の境界における変位の適合条件は厳密に成立するとしてきたので、ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の境界上では、境界要素のメッシュ分割に合わせて有限要素のメッシュ分割が行われる。しかし、境界要素の長さはＢＥＭ領域の波動の伝播速度と解析に用いる時間増分に大きく依存するので、こうしたメッシュ分割に対する制約が実務上障害になることも予想される。ここでは、こうした制約を取り除くために、ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の境界上の力の釣り合い条件ばかりでなく、変位の適合条件についても重み付き残差法で緩和した結合解法のスキームについて論じる。

2．ＦＥＭとＢＥＭの基本式

時間領域の弾性波動方程式に対するＦＥＭ表示は、媒質の粘性減衰を考慮した場合、次式で示される。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{P\} \qquad (2.1)$$

ここに、［Ｍ］，［Ｃ］，［Ｋ］はそれぞれ質量、減衰、剛性マトリックスであり、$\{\ddot{u}\}$，$\{\dot{u}\}$，$\{u\}$は、加速度、速度、変位ベクトルである。また、｛Ｐ｝は節点力ベクトルである。

弾性波動方程式に対する時間領域ＢＥＭ表示は、時間領域の境界積分方程式を離散化することにより、次のように表される。

$$\{\sigma^N\}=[k^*]\{u^N\}-\{f^N\} \qquad (2.2)$$

ここに、$\{u^N\}$，$\{\sigma^N\}$はＮステップ目の時刻における変位と表面力のベクトルであり、$\{f^N\}$は、Ｎステップ目の時刻以前の変位および表面力から構成されるベクトルである。また、$[k^*]$は弾性波動方程式のGreen 関数を積分することによって得られる、変位と表面力を関係づけるマトリックスである。

3．時間領域ＦＥ－ＢＥ法のスキームについて

実用的な使い易さを考え、ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域は、同一の時間増分で解析して行くものとする。　また、有限要素領域と境界要素領域の境界上でのメッシュ分割はたがいに自由に行われるものとする。

3．1　表面力と節点力の関係について

ＦＥＭとＢＥＭを結合するためには、表面力と変位の関係を与える、境界要素法の基本式を節点力と変位の関係式に変換しなければならない。

ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の接合部における節点力と表面力の関係は分布マトリックス［Ｄ］により次のように与えられる。

$$\{P\}=[D]\{\sigma\} \qquad (3.1)$$

ただし、分布マトリックスは次式で与えられる。

$$[D]=\int_{\Gamma}[N]^{T}[M]\,d\Gamma \qquad (3.2)$$

ここに、ΓはＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の境界であり、［Ｎ］はＦＥＭ領域の変位に用いた空間に対する補間関数、［Ｍ］はＢＥＭ領域の表面力に用いた空間に対する補間関数である。

３．２　ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の境界における変位の適合条件と力の釣り合い条件

ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の境界における変位の適合条件と力の釣り合い条件は、境界に作用する力がない場合には以下のようになる。

$$\{u\}_B = \{u\}_F$$
$$\{P\}_B + \{P\}_F = \{0\} \qquad (3.3)$$

ここに、添え字のＦとＢはそれぞれ、ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の値であることを示す。

さて、ＢＥＭ領域とＦＥＭ領域を互いに自由にメッシュ分割した場合、ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の境界上で節点の数と位置が異なるという問題が生じる。これを力の釣り合い条件に関して考察すると、分布マトリックスがこの問題を解決していることがわかる。すなわち、分布マトリックスは式（３．２）の定義より、ＢＥＭ領域の表面力をＦＥＭ領域の節点位置における節点力に変換するマトリックスである。従って、力の釣り合い条件は空間方向には問題とならず、時間方向にのみ問題となる[1)2)]。以上のことから、力の釣り合い条件は、次の時間方向の重み付き残差表示によって表される。

$$\int^{t} w(t')\,\{\{P\}_B + \{P\}_F\}\,dt = \{0\} \qquad (3.4)$$

ここに、ｔは時間、ｗ（ｔ）は重み関数である。

一方、変位の適合条件については、厳密な意味で成立させることが不可能になる。両領域の変位の時間の補間関数を同一にとれば、空間方向の重み付き残差法によって適合条件が表される。

$$\int_{\Gamma} [W]\,\{[N]\,\{u\}_F + [N_B]\,\{u\}_B\}\,d\Gamma = \{0\} \qquad (3.5)$$

ここに、$[N_B]$は境界要素領域の変位の補間関数であり、Wは重み関数を表す。ここで、重み関数を適当に選択することで、Galerkin 法や最小自乗法等を定式化することが可能となる。いずれにせよ、この式の積分を実行することで、ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の境界上における両領域の変位の関係式が次のように得られる。

$$\{u\}_B = [Q]\,\{u\}_F \qquad (3.6)$$

３．３　ＦＥ－ＢＥ法のスキームの作成

前述の重み付き残差表示された力の釣り合い条件式を積分し、ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の変位の関係式を導入することで、次のようなＦＥＭとＢＥＭの結合解法のスキームが得られる。

$$
\begin{aligned}
&[M + \gamma\Delta t C + \beta\Delta t^2 K + \alpha D k^* Q]\,\{u^N\}_F \\
&= [2M - (1-2\gamma)\Delta t C - (1/2 - 2\beta + \gamma)\Delta t^2 K - (1-\alpha) D k^* Q]\,\{u^{N-1}\}_F \\
&+ [-M + (1-\gamma)\Delta t C - (1/2 + \beta - \gamma)\Delta t^2 K]\,\{u^{N-2}\}_F \\
&+ \alpha\Delta t^2\,[D]\,\{f^N\} + (1-\alpha)\Delta t^2\,[D]\,\{f^{N-1}\} \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

ここに，α，β、γは式（３．４）の重み関数の形状で決められるパラメータ、Δtは解析の時間増分である、

４．　おわりに

有限要素と境界要素のメッシュ分割が互いに他の分割法を制約しない、結合解法のスキームを提案した。これによって、時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法がより実用的になると考えられる。

<参考文献>

1)東平・吉田「時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析」 構造工学論文集　Vol34A　pp865～875

2)東平・吉田「時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析」土木学会論文報告集　（投稿中）