I－465

動的問題における効率的時間積分法に関する研究

法政大学計算センター　正会員　武田　洋
法政大学工学部土木工学科　正会員　前田　重行
三井建設㈱　正会員　谷岡　叶

1. まえがき

土木工学における動的問題は，今日まで力学的理論やコンピューターの容量の制約などから，多くは線形問題として扱われて来た．線形問題として振動を解析するにあたっては，一般には固有値問題として振動モードを求め，それを重ね合わせることで振動を評価している．しかしながら最近では，非線形性を含む地盤-構造の連成問題とか衝撃時での応答の解明といった問題が非常に重要視されて来ているため，このような問題に対してはモード解析ではなく，時々刻々とその現象を追跡していく直接積分法の適用が必要不可欠となる．直接時間積分法に関して，主に過渡的問題に用いられている条件付き安定な陽解法と，振動問題に多く用いられる無条件安定の陰解法がある．ところが連成問題等の実際の工学的問題では，どちらか一方で解析するというように簡単に分類することは不可能である．そこでこのような問題を一般的に取り扱うため，従来から用いられてきた陽解法と陰解法を組合せ，各々の現象に応じて選択させるようなアルゴリズムの構築が必要となってくる．この方法を開発することで，効率の良い解析を行なって行くことができ，従来スーパーコンピューターを用いたとしても多大な時間（何百時間）を要した上記のような問題が，その 1/2 ～ 1/10 程度の計算時間で解析できる．

2. 一般的混合型時間積分法

異なる時間増分と異なる数値積分方法を用いて，複合要素グループの存在を適応させる混合型時間積分方法のアルゴリズムにおいては，以下における制約条件を満足させることで，モデルの動的応答を各々の要素グループ，各々の時間増分において評価させることを可能にしている（参考文献 [1] 参照）．

1) 要素グループの時間増分は，全ての要素グループの中の最小時間増分の整数倍でなければならない．
2) 隣接する各グループに対して，時間増分は互いの整数倍でなければならない．
3) 異なる時間増分で隣接する陰解法グループの存在は認めない．
4) 各々の陰解法グループの時間増分は，隣接する陽解法グループの時間増分に等しいか，それ以上でなければならない．

ここでは時間増分及び時間として，全ての要素グループ中の最小時間増分 Δt によって組み立てられる主時刻 t，各要素グループに対する時間増分 Δt_g とグループ時刻 t_g，各節点に対する節点時間増分 Δt_N と節点時刻 t_N を考えることにする．ここで，ある要素グループにのみ関係する節点は関連する時間増分に割り当てられる．ところが複数の要素グループに共通する節点は，隣接するグループの中の最大時間増分を持つように割り当てられる．

これに関するアルゴリズムは表 1 に表示する．ここで $\mathbf{M}$ は質量マトリックス，$\mathbf{C}$ は減衰マトリックス，$\mathbf{K}$ は剛性マトリックス，$\mathbf{f}$ は外力ベクトルを表わし，$\mathbf{u}$ は変位ベクトル，ドットは時間導関数を表わす．予測子-修正子スキームにおける式 (3),(4) はニューマークの基礎式を第一項を予測子，第二項を修正子として分割したものである．式 (12),(13) は，陰または陽解法グループに含まれるそれぞれのグループ g が時刻 t において意味を持つときのみ成立し，それ以外のときは全て零となる．上添字 e はベクトルもしくはマトリックスに関する一要素を表わし，$\mathbf{T}^e$ マトリックスにおける δt_i^e は，要素 e が意味を持つときに必要となる時間増加のベクトルである．式 (7) を効率良く解くため，ここでは "スカイライン法" を用いる．

- 線形システムに対する運動方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{1}$$

初期条件は（$t = 0$ に対して）

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0. \tag{2}$$

- 予測子-修正子スキーム

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_t + \Delta t\gamma\ddot{\mathbf{u}}_t, \tag{3}$$

$$\mathbf{u}_t = \tilde{\mathbf{u}}_t + \Delta t^2\beta\ddot{\mathbf{u}}_t, \tag{4}$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_t = \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t}, \tag{5}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = \mathbf{u}_{t-\Delta t} + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \Delta t^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t}. \tag{6}$$

- 任意の時刻 t におけるシステムマトリックス

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_t = \mathbf{b}_t. \tag{7}$$

ここで

$$\mathbf{A} = \sum_{g\in G_I}\mathbf{A}_I^g + \sum_{g\in G_E}\mathbf{A}_E^g. \tag{8}$$

G_I: 陰解法グループ，G_E: 陽解法グループ

$$\mathbf{A}_I^g = \sum_{e\in E_g}(\mathbf{M}^e + \gamma\Delta t_g\mathbf{C}^e + \beta\Delta t_g^2\mathbf{K}^e), \tag{9}$$

$$\mathbf{A}_E^g = \sum_{e\in E_g}\mathbf{M}^e. \tag{10}$$

また，

$$\mathbf{b}_t = \sum_{g\in G_I}\mathbf{b}_I^g + \sum_{g\in G_E}\mathbf{b}_E^g. \tag{11}$$

$$\mathbf{b}_I^g = \sum_{e\in E_g}(\beta(\mathbf{T}^e)^2\mathbf{f}^e + \mathbf{M}^e\tilde{\mathbf{u}}^e - \mathbf{C}^e(\beta(\mathbf{T}^e)^2\tilde{\dot{\mathbf{u}}}^e - \gamma\mathbf{T}^e\tilde{\mathbf{u}}^e)), \tag{12}$$

$$\mathbf{b}_E^g = \sum_{e\in E_g}(\beta(\mathbf{T}^e)^2\mathbf{f}^e + \mathbf{M}^e\tilde{\mathbf{u}}^e - \beta(\mathbf{T}^e)^2(\mathbf{C}^e\tilde{\dot{\mathbf{u}}}^e + \mathbf{K}^e\tilde{\mathbf{u}}^e)). \tag{13}$$

- $\mathbf{T}^e$ マトリックス：

$$\mathbf{T}^e = diag(\delta t_i^e). \tag{14}$$

表1：　一般的混合型時間積分法のアルゴリズム

3. 時間増分に関する理論

予測子-修正子スキームにおける安定特性は，係数行列 A が正値であるときにのみ決定する．そのとき，陽的スキームの安定性に対して要求される時間増分に関する条件は以下の通りである．

$\gamma \geq \frac{1}{2}$ に対して，

$$\tau < \tau_{crit} := ((\xi^2 + 2\gamma)^{1/2} - \xi)/\gamma. \tag{15}$$

ただし，ξ は粘性減衰係数である．これらの条件をもとに時間増分における安定限界を表現できる．通常 τ は

$$\tau = \omega\Delta t \tag{16}$$

によって表わされ，安定条件は系全体における各々のモードに対して満足されなければならない．よって高次固有振動数ωに対して，式(16)は最小時間増分を与える．そこで有限要素離散化から運動方程式が得られたならば，ωは個々の要素の中の最大固有振動数となることが期待される．以上のことより系全体における安定限界Δt_{stab}は

$$\Delta t_{stab} = \frac{\tau_{crit}}{max(\omega_{max}^{(e)})} \tag{17}$$

と表わされる．ξもしくはγが増加すれば，このアルゴリズムに対して安定限界は減少するため，当然ξの評価が重要になってくる．最大固有振動数は要素における最大固有値から求めることができるが，直接，要素の最大固有値を計算することは避けなければならない．その代わりに固有値もしくは固有値の上界を与える定式を用いる．欠点は上界が固有値よりより大きくなるという可能性が存在するため，固有値はきびしく過大評価され，時間増分は必要なものより小さくなる．このような定式は離散化された要素によって異なり，弾性波の伝播速度とメッシュの大きさに深く関係する．

上述した時間増分に関する理論から次のような関係式が考えられる．

$$\Delta t_{min}^{(e)} = f(\xi^{(e)}, \gamma, \lambda_{max}^{(e)}(c, h)). \tag{18}$$

ここで$\lambda_{max}^{(e)}$は要素における最大固有値であり，cは弾性波の伝播速度，hはメッシュの大きさを表わしている．右辺におけるそれぞれの未知数は，材料やメッシュの情報等から既知となり，安定性のある時間増分を求めた上での時間積分が可能となる．そこで，各要素における最小時間増分を計算し，システムの安定限界と比較することによって，自動的に要素をいくつかの時間グループに分類し，特性に応じて陰，陽どちらかのスキームを選択させるアルゴリズムが構築できる．その概要は図1において表示する．

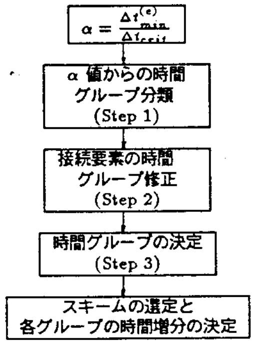

図1： 自動的時間増分選択法のフローチャート．

この自動的時間増分選択方法では，まず最初に，解析モデル全体を陽的に扱うものとして，全ての要素における最小時間増分を求めることから始まる．次に各要素の時間グループを分類するために，3つの段階が構成してある．Step1においては，システムの安定限界に対する相対的な割合のみで，各要素の時間グループを分類する．Step2では，分類された各グループに接続する要素の時間増分が，安定性の面で適切となるように接続グループを修正する．最終的にStep3で，各グループの要素数の立場から効率のよい分類を決定する．最後にスキームの選定と陰的スキームによる場合の時間増分を決定する．陰的要素はシステムの最小時間増分を持つグループにおいて成り立ち，時間増分はその接続要素に等しくなるようにする．

4. 例題及び数値結果

これまでに述べてきたアルゴリズムに基づいて作成したプログラムGEMIXを用いて，地盤-構造の連成問題（沖積層に埋設したボックスカルバート）の解析をFACOM-M380Qで行なった．要素は全て双一次四辺形要素であり，集中質量マトリックスを用いる．問題を簡単にするために粘性減衰係数は零とし，全ての節点に最大加速度振幅200gal，周期0.48secの地震波を与えるものとする．

応力集中が著しいと思われるボックスカルバートの一節点について，その加速度応答をここで示す（図2）．また比較の対象となるものとして，全ての要素を系全体の安定限界で解析した結果を与える（図3）．GEMIXで解析した加速度応答スペクトルは，図3のそれに対して，若干のずれはあるものの応答を的確に捕らえていることがわかる．目的とする効率性の改善では，後者がCPU time: 3955.87secに対して，前者はCPU time: 1745.22secと半分弱の解析速度となり，明らかに効率的であることが言える．

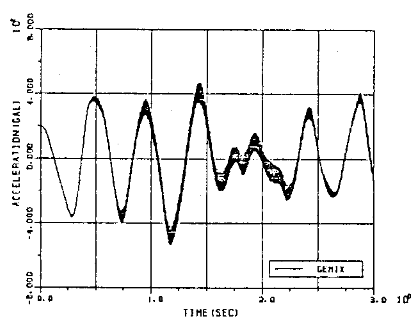

図2： GEMIXによる加速度応答スペクトル

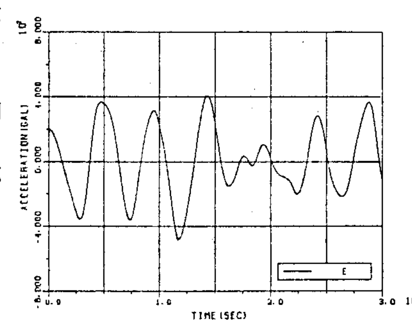

図3： 陽解法による加速度応答スペクトル．

5. あとがき

今回の自動的時間増分選択方法では，主に地盤-構造の連成問題に着目して，時間グループを分類するように構成したが，分類範囲を少し変えることにより，様々な線形動的問題に対する応用が可能となる．また非線形問題に対応できるようにプログラムを修正することで，今後大きな発展が期待できるものと考えられる．

参考文献

[1] J.P.Coyette,A Generalized Mixed Time Integration Program for Structual Dynamics,in Eng.Comput,Vol.4,(1987)