I-443　多層地盤に対するグリーン関数の計算方法

岡山大学　学生員　有岡謙一
岡山大学　正会員　竹宮宏和
岡山大学　学生員　渡辺和明

1. まえがき

地盤-構造系の耐震解析において境界要素法を適用する場合，地盤に対するグリーン関数を評価することが重要である。本報告は平面歪状態の半無限多層系粘弾性地盤に対する面内波 (P-SV波)のグリーン関数の効率的な計算方法を述べ、その妥当性を検証している。

層状地盤のグリーン関数の数値計算において問題となるのは、まず波数領域において波数が大きい時の剛性行列要素の桁落ちと波数と層厚の積が大きい時のオーバーフローである。さらに波数積分においては、複素ポールの存在を考慮した区間分割の方法と無限積分の方法である。今回、これらの問題点を特に考慮してコンピュータコードを作成した。

2. 定式化

（１）基本式　　時間的には調和振動問題 exp(-iωt)を考える。ここに ω は角振動数である。粘弾性体に対する波動方程式に変位ポテンシャルを導入し、x軸方向(Fig.1)に波数kで Fourier変換し、一般解を求めその逆Fourier変換を施すと波数積分表示の一般解が得られる。さらに、求められた変位ポテンシャルから変位と応力は次式のようにあらわされる 。[1)]

$$[\, u \,,\, w \,,\, \tau_{xz} \,,\, \sigma_{zz} \,] = \int_{-\infty}^{\infty} [\, U \,,\, W \,,\, T \,,\, \Sigma \,]^T exp[ik(x-\xi)]\,dk \tag{1}$$

ここで $\{\mathbf{S}(z)\} = [\, U \,, W \,, T \,, \Sigma\,]^T$ とおくと $\{\mathbf{S}(z)\}$は波数領域における変位-応力ベクトルである。第m層内の $\{\mathbf{S}(z)\}$は次式であらわされる。

$$\{\mathbf{S}(z)\} = [\mathbf{Q}(m)][\mathbf{E}(z-z_{m-1})]\{\mathbf{C}(m)\} + \{\hat{\mathbf{S}}(z)\} \tag{2}$$

ここに $[\mathbf{Q}(m)]$, $[\mathbf{E}(z-z_{m-1})]$ は ω,k, 第m層の地盤定数(せん断剛性 μ ,P波速度 c_1 ,S波速度 c_2 , 減衰定数 ζ_1 , ζ_2)及び応答点のz座標等によって決まる定数マトリックス、 $\{\mathbf{C}(m)\}$ は未知積分定数ベクトルであり、これらの積が斉次解をあらわしている。 $\{\hat{\mathbf{S}}(z)\}$ は第m層に加振源が分布する時にのみ必要な特解項の zに関する定数ベクトルである。

(2) 剛性行列及び波数領域における解　　各層の上端(A),下端(B)における変位$\{\mathbf{U}_{AB}\}$ と応力 $\{\mathbf{T}_{AB}\}$ の関係は式(2)を変形することによって次のように得られる。

$$\{\mathbf{T}_{AB}\} = [\mathbf{K}_{AB}]\{\mathbf{U}_{AB}\} - \{\mathbf{P}_{AB}\} \tag{3}$$

ここに、$\{\mathbf{T}_{AB}\} = [T_A \,, \Sigma_A \,, T_B \,, \Sigma_B]^T$, $\{\mathbf{U}_{AB}\} = [U_A \,, W_A \,, U_B \,, W_B]^T$ であり、$\{\mathbf{P}_{AB}\}$は外力項ベクトルである。$[\mathbf{K}_{AB}]$ が各層の剛性行列を表す。さらに、 $\{\mathbf{P}_{AB}\} = [\mathbf{K}_{AB}]\{\bar{\mathbf{U}}_{AB}\} - \{\bar{\mathbf{T}}_{AB}\}$ と表現でき、 $\{\bar{\mathbf{U}}_{AB}\}$, $\{\bar{\mathbf{T}}_{AB}\}$ は層内に加振源が分布する場合の両端の特解定数ベクトルである。ここでは、応力の方向を全体の座標系に合わせるため上端(A)の応力の符号を逆にし、剛性行列の対称性を得るため、 WとΣに虚数単位 i を乗じている。また、最下層の半無限体に対する剛性行列は斉次解における上昇波成分が存在しないという条件から求めることができる。今、層厚をhとし、P波波数k_1, S波波数k_2, z軸方向のP,S波の波数ν_1 , ν_2を次のように定義する。

$$k_1 = (1+i\zeta_1)\omega/c_1 \ , \ k_2 = (1+i\zeta_2)\omega/c_2$$
$$\nu_1^2 = k^2-k_1^2 \ , \ \nu_2^2 = k^2-k_2^2 \tag{4}$$

これらの定数を用いて剛性行列を数値計算する際に、　$\mathrm{Re}(k_2)/k$　の値が非常に小さくなると桁落ち、$\mathrm{Re}(\nu_1)h$, $\mathrm{Re}(\nu_2)h$ が大きくなると、 $\sinh(\nu_1 h)$, $\cosh(\nu_1 h)$ 等の項においてオーバーフローの問題が発生する。そこで本コードにおいては、桁落ちに対してはテーラー展開近似を用い、オーバーフローに対しては $\exp(\nu_1 h)$ 等で剛性行列要素の値を割ることによって処理した。

波数領域の解は式(3)を用いて、全体系に対しつり合条件と連続条件を適用することによって、まず層境界の変位と応力が求まり、それを用いて積分定数ベクトルを計算すれば、任意点(z)の応答値$\{\mathbf{S}(z)\}$ が得られる。また σ_{xx} に対応する波数領域の値　Σ_1 はUとΣ から計算できる。

(3)　波数積分.[1)]　　加振源がデルタ関数で表せる場合、(加振源座標(ξ , ζ))　波数領域の応答値を一般に $F(k,z,\zeta)$とおけば、空間領域における応答値 I は次式で表される。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(k,z,\zeta)\exp\{ik(x-\xi)\}\,dk \tag{5}$$

ところが、加振力F_xまたはF_z に対する応答値 U,W,T,Σ,Σ_1 、はその種類によってkに関する奇関数か偶関数に分け

ることができる。したがって式(5)の積分範囲は[0,∞)とできる。この積分区間を [0,k_c]の有限区間と[k_c,∞) の無限区間に分ける。有限区間については、さらに細分割しながらChebyshev 多項式近似による求積法を用いる。無限区間については $F(k,z,\zeta)exp(k|z-\zeta|)/k$ に対してChebyshev多項式近似を用い、解析的に積分する。本コードにおいては、与えられた精度を満足するように自動的にk_cの値、区間分割及び積分次数を求めるように設計されている。積分次数Nは計算精度の上から有限区間においては N=4 または N=8 を無限区間においては N=4 を用いることにした。なお数値計算においては、長さの単位は$k_{2,max}$、力の単位は$\mu_{\min}$ を用いて無次元化している。

3. 数値計算例及び考察

本計算方法の妥当性を検証するために、Fig.2とTable-1に示すような、半無限地盤を仮想の２層系地盤に分割し、集中単位加振F_z を作用させたモデルを用いて計算した。計算結果をFig.3,Fig.4に示す。Fig.3は波数領域の解であり、Fig.4は空間領域の解である。Fig.4において文献1)の計算結果と比較している。ほぼ妥当な結果が得られている。なお、本法による、剛性行列表現による半無限体地盤に対する地表面加振の地表面応答の形式解は、$Lamb^{2)}$の形式解と一致していることを確かめている。本計算方法によって、多層系粘弾性地盤のグリーン関数が、精度よく効率的に計算できることがわかった。

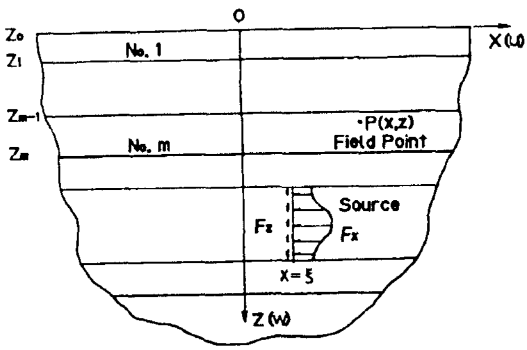

Fig.1 多層地盤における加振源と応答点

Table-1 無次元化した地盤定数

Thickness	c_1	c_2	ζ_1	ζ_2	*Density*
5.0	2.0	1.0	0.005	0.005	1.0
∞	2.0	1.0	0.005	0.005	1.0

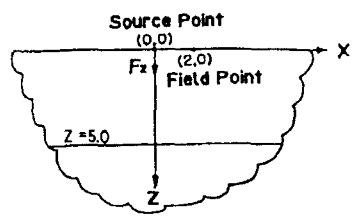

Fig.2 2層系地盤

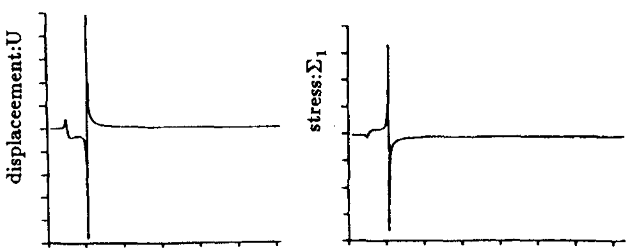

Fig.3 波数領域における応答値

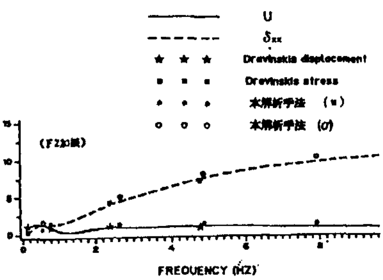

Fig.4 空間領域における応答値の計算結果の比較

参考文献　1) P.-C.Xu and A.K.Mal : Calculation of the inplane Green's functions for a layered viscoelastic solid, Bull.Seism.Soc.Am.,Vol.77,No.5(1987)
2) Horace Lamb : On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, Phil.Trans.(1903)