I-363　２段階陽的有限要素法による圧縮性を考慮した角柱回りの流れの解析

○正員　三井造船㈱　平野　廣和
正員　中央大学　川原　睦人

１．はじめに

著者らは、非圧縮性流れの解析に対し、２段階陽的有限要素法に基づく極微量の圧縮性を含む音速法を提案し、多くの成果を挙げてきた。一方、土木工学の分野に於いてもトンネル工事における発破作業時の換気や衝撃波の伝播、高速列車がトンネルを通過する時発生する衝撃波の伝播の問題等、圧縮性流れを扱う必要性もある。この種の問題は、全体的に見て局部的な部分を除き、温度がほぼ一定と扱えることが多いので、この仮定のもとに圧縮性流れの方程式を誘導し、解析を試みることができる。本報では、従来の非圧縮における音速法の仮定を再検討し、圧縮性流れに適用できるように定式化した考え方について論ずる。

２．音速法による圧縮性流れの基礎方程式

圧縮性が存在する流れに対して、圧力Ｐと密度ρの関係は、次の状態方程式で結ばれている。

$$P=\chi\rho^{\gamma} \qquad (1) \qquad\qquad C^2=\frac{\partial P}{\partial\rho}=\chi\gamma\rho^{\gamma-1} \qquad (2)$$

ここでＣは音速、χは比例定数、γは比熱比である。質量保存の法則は、次のように表される。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \qquad (3)$$

ここでＵ，Ｖは流速を表す。式 (2)を時間ｔ及びｘ，ｙで微分すると、次の３つの式が誘導される。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{2}{\gamma-1}\rho\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial t} \quad (4) \qquad\qquad \frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{2}{\gamma-1}\rho\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{2}{\gamma-1}\rho\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial y} \quad (6)$$

式 (3)に式 (4)～(6) の関係を代入し整理すると、次の方程式を得ることができ、これを連続の式とする。

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\gamma-1}{2}C\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \qquad (7)$$

流れの運動を支配する方程式には圧縮性を考慮した Navier-Stokesの方程式を用いる。式 (1)をｘ，ｙで微分し、式 (5),(6)に代入すると圧力の微分項に関して次の関係を得ることができる。

$$P_{,i}=C\frac{2}{\gamma-1}\rho C_{,i} \qquad (8)$$

式 (8)を Navier-Stokesの方程式に代入して整理すると、次の式を得ることができ、これを運動方程式とする。ここで、ｖ　は流速、κは体積粘性係数、μはせん段粘性係数、ｆ　は外力をそれぞれ表す。

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j v_{i,j}+\frac{2}{\gamma-1}C\cdot C_{,i}-\lambda v_{k,ki}-\nu\left(v_{i,j}+v_{j,i}\right)_{,j}-f_i=0 \qquad (9)$$

３．有限要素法の適用

圧縮性流れの運動の方程式 (9)と連続の方程式 (7)に Galerikin法を適用し、運動の方程式の粘性項に部分積分をほどこした上で有限要素方程式に定式化する。解析領域は三角形要素で離散化し、流速・音速ともに一次の形状関数で内挿補間する。ところで、両方の式には時間微分項が入っているため、時間方向への離散化を行う。時間方向への離散化には、２段階陽的解法を適用し、有限要素方程式を誘導する。

４．数値解析例

ここでは、一辺の長さがｄである正方形角柱の回りの迎角 0° における流れの解析を行った。解析領域は横36ｄ，縦16ｄであり、総節点数4245，総要素数8330である。この領域内にＵ0 ＝100.0 の流れが来た場合

について解析を実施した。解析に用いた解析諸係数をTable(1)に示す。初期条件は、流速については全領域において零、音速については常温の大気とほぼ等しい 337.0を全領域に与えた。

Fig.-1～Fig.-3に時間 t ＝ 4.5, 4.6, 4.7における流速分布図を、Fig.-4～Fig.-5に同時間における音速分布図をそれぞれ示す。これらより、角柱の上下それぞれの面から形成される渦の動きが時間の経過とともにみることができる。

5．終わりに

本報をまとめると、次のように整理することができる。

①．非圧縮流れにおける音速法の仮定条件を見直すことにより、流速と音速を未知数とする圧縮性流れの方程式を誘導することができた。

②．ここで提案した方程式系に２段階陽的有限要素法が適用できた。

③．圧縮性流れ場でのKarman渦の放出等の非定常解析が可能となった。

Table(1)

Δt	0.0001
μ	0.1
κ	0.0333
e	0.7

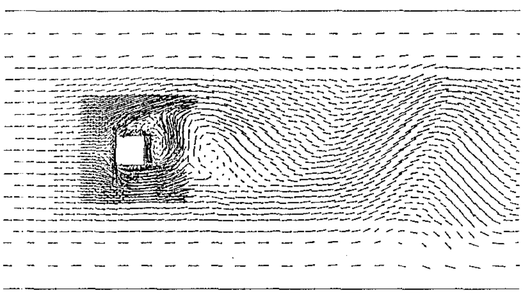

Fig.-1　Time=4.5

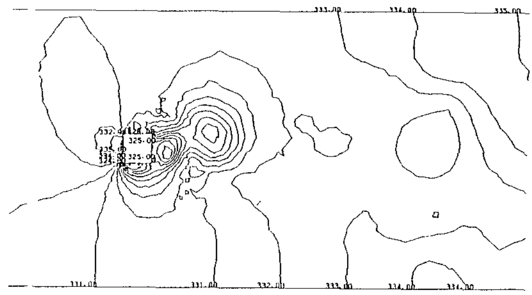

Fig.-4　Time=4.5

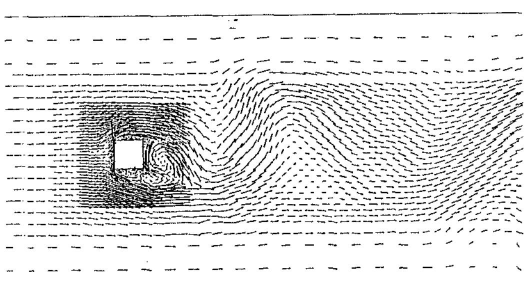

Fig.-2　Time=4.6

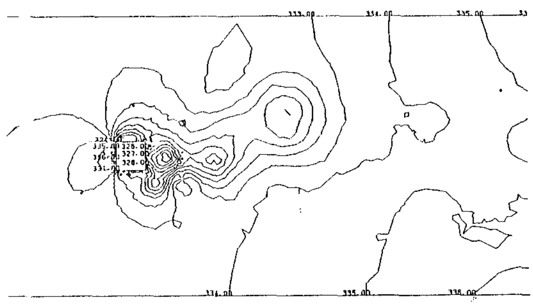

Fig.-5　Time=4.6

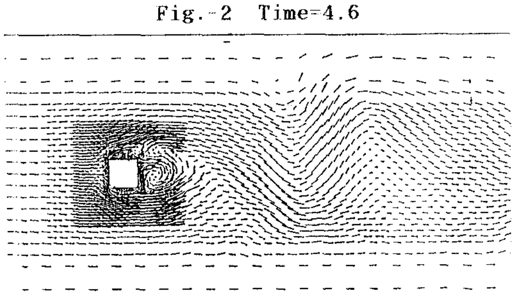

Fig.-3　Time=4.7

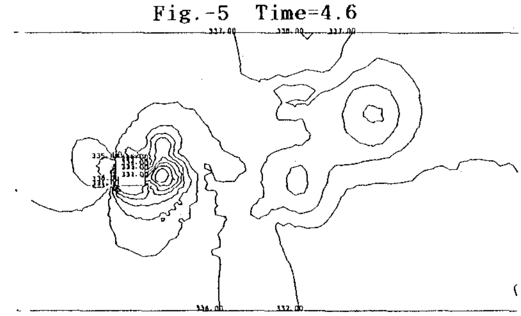

Fig.-6　Time=4.7

<参考文献>　①．足立；圧縮流れの解析、流れの解析のための有限要素法入門コーステキスト，1988

②．平野，川原；２段階陽的有限要素法による圧縮性流れの解析に関する一考察，第43回年次学術講演会

③．平野，川原；２段階陽的有限要素法による圧縮性流れの解析，第 2回数値流体力学シンポジウム 1988