I-332　複素数の弾性定数を有する半無限弾性体の動的コンプライアンス

東京大学地震研究所　正員　東原紘道

1．はじめに

半無限弾性体の内部の波動の動的コンプライアンス理論は、地球程度の規模から結晶物体にいたるまでの固体の動的応答の推定、およびそれの逆問題である同定問題の数学的な基礎を与えるものである。それは古くからの問題でありながら、近年の計測技術の進歩とともに、その重要性をましている。

一般に、半無限弾性体中の波動場を離散化して数値計算することはきわめて困難で信頼性に乏しい。したがって、解析的な扱いが可能なモデルは、たとえそれが相当に単純化されたものであっても、意義を認めることができる。この点、一様な半無限弾性体上の円板の応答問題は、計算の本質的な部分が解析的になされうるばかりでなく、そのように解析的な処理を許容するモデルのうちでは、おそらく最も一般的であると考えられ、したがって現実への適合性が高い。

円板の応答を規定する物理量のうち卓越振動数は、通常のすなわち実数の弾性定数に対する半無限弾性体の動的コンプライアンスの理論公式によって、精度よく計算される。しかし、これによって求められる応答の振幅値の妥当性については疑問がある。それは、言うまでもなく、振動数と異なって振幅値は波動の減衰を敏感に反映するからである。現実の弾性体は、通常の波動公式が考慮している逸散減衰の他に、粘性を主因とする内部減衰を有しているため、これを併せて評価することが必要である。本研究は、この要請に応えられるように、既往の波動公式を拡張することを目的とする。この試み自体はたいへん古いものであって新規性はない。しかし以下に見るように、本研究の結論は簡潔明瞭であり、しかも円板のすべての振動モードの公式に対して普遍的に成立するものである。この意味で応用上の意義がある。ただし紙面の制約のため、ここで例示されるのは、一部の公式に限られる。

2．複素数の弾性定数

微小振幅の単振動をする弾性体の内部減衰は、それに見合う虚数成分を弾性定数に付加することによって考慮される。1自由度系の粘性減衰に対してはこの方法は数学的に妥当であるが、連続体に対する適合性は必ずしも明かではない。しかしこの是非を議論することはここでの目的ではない。ここでの目的は、弾性定数が複素数である場合の波動の計算公式を確立することである。

さてラメの二つの定数が複素数であるとする。これらの偏角は必ず正数である。以下ではこれらが等しい場合のみを考え、これを 2φ とする。計算の遂行そのものは、偏角が異なる場合にも可能であるが、結果は非常に複雑になる。そこでこれは将来の問題として、偏角の違いが重要な意味を有しているような現象が見いだされるまでは考察の外におくことにする。

着目する振動数に対して、弾性定数が実数の場合と形式的に同じに定義された波数を、縦波および横波についてそれぞれ a, b と書く。これらの偏角はいずれも $-\varphi$ に等しい。後述の公式に現れる関数は次のとおりである。

$$F(x;a,b)=(2x^2-b^2)^2-4x^2\alpha(x)\beta(x),\quad \alpha(x)=(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}};\quad \beta(x)=(x^2-b^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

ここに α と β の分枝は、$x\to\infty$ において正数となるように選ぶ。

弾性定数が実数の場合と同様に、関数Fは唯一の0点（これを κ とする）をもつ。しかも κ の偏角もやはり $-\varphi$ である。これは、関数Fが同次式であることに因る。このためFの特異点はすべて、複素平面上で原点を通る1本の直線上にのっている。得られる結果の簡単さはこの事実に負うている。

3．既往の計算公式

(1) デュアル積分方程式法

剛体円板に対するデュアル積分方程式法の公式は、複素弾性定数に対しては次のように求められている。すなわち円板の鉛直変位および接触面の垂直応力は、次に示す第二種フレドホルム型積分方程式の解 ψ を２回積分変換することによって求められる。

$$\psi_m(r)+\int_0^R K_m(r,s)\psi_m(s)ds = r^m \qquad (m=0,1) \tag{2}$$

$$K_m(r,s)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[1+\frac{b^2}{1-\nu}\frac{k\alpha(k)}{F(k;a,b)}\right]\begin{Bmatrix}\cos(kr)\cos(ks)\\ \sin(kr)\sin(ks)\end{Bmatrix}dk \qquad \begin{matrix}m=0\\ m=1\end{matrix} \tag{3}$$

したがって、弾性定数が複素数になることの影響は、積分核（弾性定数が実数のときから既に複素数である）の変更となって現れることがわかる。この積分の具体的な計算法はこれまで公には議論されていない。もしこれを正確に評価しようとするなら、本研究の方法と同様な処理が必要である。なおこの計算は、本研究の公式において、ベッセル関数 $J_0(x)$ と $J_1(x)$ をそれぞれ三角関数 $\cos(x)$ と $\sin(x)$ に置換したものに他ならないので、本研究の結果の系として容易に計算することができる。

(2) 点加振源

鉛直方向の単位の集中荷重によって生じる鉛直変位 $w(r)$ は、次の積分によって決定される。水平荷重による水平変位も類似の積分で計算される。

$$w(r)=-\frac{1}{2\pi\mu}\int_0^\infty\frac{b^2k\alpha(k)}{F(k;a,b)}J_0(kr)dk \tag{4}$$

これもまた本研究の公式の特別な場合にあたっているので、容易に計算される。

4．複素弾性定数に対する直接積分方程式法

円板の有無とは無関係に、一般の円形接触面に対して、接触面の変位３成分と接触応力３成分とは、直接に積分方程式によって定式化されている。例えば式(4) に対応する成分は次のように表されている。

$$\left[\frac{2c}{\pi r}K(s/r)-\pi\frac{\varkappa\,\alpha(\varkappa)}{F'(\varkappa)}H_0(\varkappa r,\varkappa s)+\int_a^b\frac{k\alpha(k)}{F_1^2(k)+F_2^2(k)}F_2(k)H_0(kr,ks)dk+\int_0^a\frac{k\sqrt{a^2-k^2}}{F_1(k)+F_3(k)}H_0(kr,ks)dk\right]b^2 \tag{5}$$

ここに関数 $H_m(x,y)$ はベッセル関数に類似した一つの特殊関数であって、次式によって計算される。鉛直振動の場合には上述のとおり $m=0$ であるが、着目するモードに応じて種々のmが現れる。逆に動的コンプライアンスの公式に含まれる特殊関数は $H_m(x,y)$ に限られる。

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}m\vartheta_1 d\vartheta_1\int_0^\pi\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}m\vartheta_2 d\vartheta_2\left|\sin x\cdot\sin\vartheta_1-y\cdot\sin\vartheta_2\right|$$
$$\pm[J_m(x)N_m(y)+J_m(y)N_m(x)]+iJ_m(x)J_m(y) \tag{6}$$

弾性定数が複素数であることを考慮しつつ、式(5) の誘導をやり直すことにより、次の結論が得られる。直接積分方程式法においては、弾性定数の複素数化に伴い、積分核関数のうち唯一つ特殊関数のみが変更されるだけである。しかもその変更は、次のように引き数の単純な複素数化である。

$$H_m(x,y)\longrightarrow H_m(e^{-i\varphi}x,e^{-i\varphi}y) \tag{7}$$

これにより、弾性定数が複素数の場合の問題を容易に計算することができる。