

I-328

衝撃荷重を受ける弾性厚円盤の解析

大阪市立大学 正員 小林 治俊
 大阪市立大学 正員 園田恵一郎
 香川県 廣瀬 治
 西日本旅客鉄道 正員 奥田 東吾

[1] まえがき

筆者らは、先に衝撃荷重を受ける平面梁内の応力波伝播特性を動弾性理論に基づき明らかにした[1]。本報告は、滑床上に置かれた軸対称厚円盤が衝撃荷重を受ける場合を三次元動弾性理論により固有関数展開法[1, 2]を用いて解析を行い、応力波伝播特性を検討したものである。

[2] 解析方法

解析対象の座標系を図1に示す。等方性軸対称円盤の運動方程式は次式で表される。

$$G\left(\Delta u + \frac{1}{2\nu-1} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$G\left(\Delta w + \frac{1}{2\nu-1} \frac{\partial e}{\partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

ここに G =せん断弾性係数, ν =ポアソン比,
 ρ =密度, t =時間,

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

境界条件は,

$$\begin{aligned} w &= \sigma_r = 0 & (r=b) \\ \sigma_r &= -f(t)q(r), \tau_{rz} = 0 & (z=-h/2) \\ w &= \tau_{rz} = 0 & (z=0) \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)の解を準静的解 (u^s, w^s) と動的解 (u^d, w^d) に分けて式(3)の様に表す。

$$\begin{aligned} u(r, z, t) &= u^s(r, z, t) + u^d(r, z, t) \\ w(r, z, t) &= w^s(r, z, t) + w^d(r, z, t) \end{aligned} \quad (3)$$

u^s, w^s は式(2)の境界条件を満たし次式で表される。

$$\begin{bmatrix} u^s(r, z, t) \\ w^s(r, z, t) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U_m^s(z) J_1(\alpha_m r) \\ W_m^s(z) J_0(\alpha_m r) \end{bmatrix} \quad (4)$$

また, u^d, w^d は未定時間関数 $Q_{mn}(t)$ と固有関数により式(5)の様に置ける。

$$\begin{bmatrix} u^d(r, z, t) \\ w^d(r, z, t) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \begin{bmatrix} U_{mn}^E(r, z) \\ W_{mn}^E(r, z) \end{bmatrix} \quad \text{ただし, } \begin{aligned} U_{mn}^E &= U_{mn}(z) J_1(\alpha_m r) \\ W_{mn}^E &= W_{mn}(z) J_0(\alpha_m r) \end{aligned} \quad (5)$$

式(4), (5)において, $J_i(\cdot)$ は i 次のベッセル関数, α_m は $J_0(\alpha_m b) = 0$ の m 次の根である。

式(4), (5)を式(1)に代入し, u^s, w^s と u^d, w^d が満足する次式:

$$\left. \begin{aligned} G\left(\Delta u^s + \frac{1}{2\nu-1} \frac{\partial e^s}{\partial r} - \frac{u^s}{r^2}\right) &= 0 \\ G\left(\Delta w^s + \frac{1}{2\nu-1} \frac{\partial e^s}{\partial z}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} (6) \quad \left. \begin{aligned} G\left(\Delta U_{mn}^E + \frac{1}{2\nu-1} \frac{\partial e_{mn}^E}{\partial r} - \frac{U_{mn}^E}{r^2}\right) &= -\rho p_{mn}^2 U_{mn}^E \\ G\left(\Delta W_{mn}^E + \frac{1}{2\nu-1} \frac{\partial e_{mn}^E}{\partial z}\right) &= -\rho p_{mn}^2 W_{mn}^E \end{aligned} \right\} (7)$$

ただし p_{mn} は固有円振動数, を考慮して式を変形し, その後固有関数の直交性を利用すると未定時間関数 $Q_{mn}(t)$ に関する次の2階の微分方程式を得る。

$$\ddot{Q}_{mn}(t) + p_{mn}^2 Q_{mn}(t) = -F_{mn}(t)/N_{mn} \quad (8)$$

ただし $\ddot{\cdot} = d^2/dt^2$.

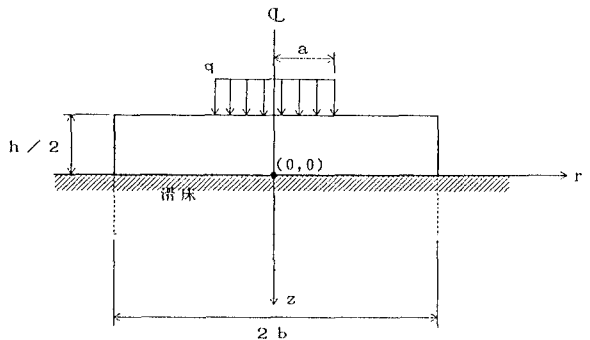


図1 座標系

$$F_{mn}(t) = \int \int [\ddot{U}^s(r, z, t) U_{mn}^E(r, z) + \ddot{W}^s(r, z, t) W_{mn}^E(r, z)] r dr dz \quad (9)$$

$$N_{mn} = \int \int \{ [U_{mn}^E(r, z)]^2 + [W_{mn}^E(r, z)]^2 \} r dr dz \quad (10)$$

式(8)の解はデュアメル積分で与えられ、荷重に対応する具体的な表示式が容易に求められる。

〔3〕数値計算例

円盤上面にステップ状の分布荷重 $H(t)q(r)$ が作用する場合につき計算を行った。用いた緒元は荷重幅 $a/b=0.4$ ，円盤厚/直径比 $h/2b=0.3$ ，ポアソン比 $\nu=0.3$ であり，時間については無次元時間 $T [= C_1 t/h]$ ，ここに $C_1 = \sqrt{2G(1-\nu)/\rho(1-2\nu)}$ は縦波の速度を用いた。なお載荷前の円盤は静止しているものとしている。円盤底部中央点($r=z=0$)の応力 σ_r, σ_z の初期応答を図2に示した。他の結果については講演時に発表予定である。

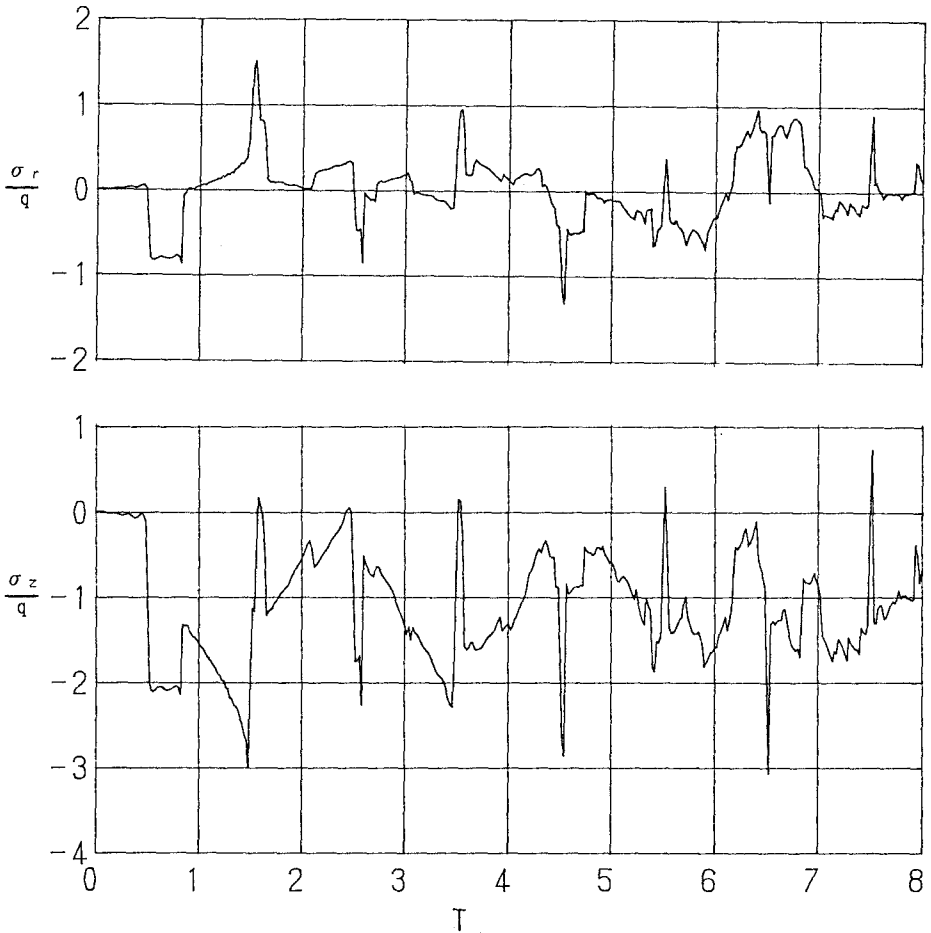


図2 円盤底部中心点の応力 σ_r, σ_z の初期応答曲線

〔4〕参考文献

1. 奥田, 小林, 園田: 衝撃荷重を受ける平面梁の応力波伝播解析, 土木学会第43回年次学術講演会, I-424, 1988.
2. Lee, Y.C and Reismann, H.: Dynamics of Rectangular Plates, International Journal of Engineering Science, Vol.7, 1969.