

I-323 地中点加振解への鞍部点法の適用

神戸大学 正 北村 泰寿 奈良県 正〇安井 広之

1. まえがき

波動理論に基づいて誘導される加振解の漸近解を得るため、一つの方法として鞍部点法(最急降下法)の適用が図られている。本研究は、地表面点加振解を取り扱った前報¹⁾に引き続いて、松岡ら²⁾によって求められている半無限弾性体内部の点加振解のポテンシャル部に対して鞍部点法の適用を試みたものである。

2. 基礎式と積分の評価

本報では、紙面の都合上、上下点加振力による上下変位を例にとって鞍部点法の適用結果を示す。半無限弾性体の表面に原点をとり、図-1に示す座標系を考えると、地中点加振力 $P \exp(i\omega t)$ による変位 w は次式で与えられる。

$$w = \frac{P \kappa \exp(i\omega t)}{2\pi \mu} (W + S) \quad (1)$$

$$W = \int_0^\infty \frac{\zeta^3 G(\zeta, b) H(\zeta, c)}{\beta F(\zeta)} J_0(\zeta \alpha) d\zeta \quad (2)$$

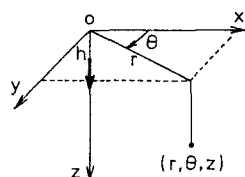


図-1 座標系

ただし、 $F(\zeta) = (2\zeta^2 - 1)^2 - 4\zeta^2 \alpha \beta$, $G(\zeta, b) = -(2\zeta^2 - 1) \exp(-b\beta) + 2\alpha \beta \exp(-b\alpha)$,

$$H(\zeta, c) = (2\zeta^2 - 1) \exp(-c\beta) - 2\alpha \beta \exp(-c\alpha), \quad \alpha^2 = \zeta^2 - \gamma^2, \quad \beta^2 = \zeta^2 - 1,$$

$$\alpha = \kappa r, \quad b = \kappa z, \quad c = \kappa h, \quad \kappa = \omega/V_s, \quad \gamma = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

また、 ω は加振円振動数、 V_s は横波の伝播速度、 μ はせん断弾性係数、 ν はポアソン比、 h は加振源深さ、 $J_0(\cdot)$ は0次のベッセル関数である。なお、式(1)中の W がポテンシャル解で、 S は素解を表わしているが、 S の内容については紙面の都合上、文献2)に譲る。

いま、ベッセル関数をハンケル関数表示し、無次元振動数 α が十分大きい場合におけるハンケル関数の漸近表示を用いれば、式(2)は次式のように書き換えられる。

$$W = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha} \exp(-i\pi/4) \sum_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta^{5/2} T_j(\zeta)}{F(\zeta)} \exp\{\alpha f_j(\zeta)\} d\zeta \quad (3)$$

ただし、 $T_1(\zeta) = -(2\zeta^2 - 1)^2/\beta$, $T_2(\zeta) = -4\alpha^2 \beta$, $T_3(\zeta) = T_4(\zeta) = 2(2\zeta^2 - 1)\alpha$,

$$f_1(\zeta) = i\zeta - \beta(b+c)/\alpha, \quad f_2(\zeta) = i\zeta - \alpha(b+c)/\alpha, \quad f_3(\zeta) = i\zeta - (\alpha b + \beta c)/\alpha,$$

$$f_4(\zeta) = i\zeta - (\alpha c + \beta b)/\alpha$$

式(3)の積分に対して、変数 ζ を複素変数 $\xi = \zeta + i\eta$ に変換する。

このとき、第1項に対する積分路は図-2のように設定される。また、第2項以降についても同様の積分路が設定できる。これらの積分路より、鞍部点、分岐線、極の寄与が以下のように得られる。

(1) 鞍部点寄与

$$W_1 = \frac{1}{\alpha} \exp(-i\pi/4) \sum_{j=1}^4 \frac{\xi_j^{5/2} T_j(\xi_j)}{\sqrt{f_j''(\xi_j)}} \exp\{\alpha f_j(\xi_j)\} \quad (4)$$

ここに、 $f_j''(\xi) = d^2 f_j(\xi)/d\xi^2$, また ξ_j は $f_j(\xi)$ から求まる鞍部点である。

(2) 分岐線寄与

$$W_2 = \frac{8i}{\sqrt{\pi} \alpha} \sum_{j=1}^4 D_j \cdot \exp\{\alpha f_j(-\delta_j)\} \int_0^\infty \sigma^2 \cdot \exp(p_j \sigma + q_j \sigma^2) d\sigma \quad (5)$$

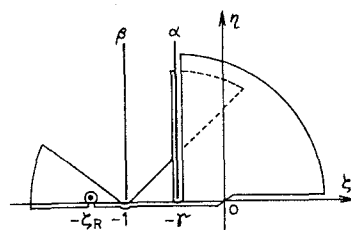


図-2 第1項の積分路

ただし、 $D_1 = -\gamma^5/(2\gamma^2 - 1)^2$, $D_2 = -(1 - \gamma^2)$, $D_3 = D_4 = 2(1 - \gamma^2)$, $\delta_1 = \gamma$, $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 1$,
 $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = i\sqrt{2}c$, $p_4 = i\sqrt{2}b$, $q_1 = -\alpha + \gamma(b + c)/\sqrt{1 - \gamma^2}$,
 $q_2 = -\alpha + i(b + c)/\sqrt{1 - \gamma^2}$, $q_3 = -\alpha + ib/\sqrt{1 - \gamma^2}$, $q_4 = -\alpha + ic/\sqrt{1 - \gamma^2}$,
 なお、式(5)の積分は定積分公式を利用して評価するが、紙面の都合上、詳細は省略する。

(3) レイリー極寄与

$$W_3 = \frac{i\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\alpha}} \exp(-i\pi/4) \sum_{j=1}^4 \frac{(-\zeta_R)^{5/2} T_j(-\zeta_R)}{F'(-\zeta_R)} \exp\{\alpha f_j(-\zeta_R)\} \quad (6)$$

ここで、 $F'(\zeta) = dF(\zeta)/d\zeta$, また $-\zeta_R$ はレイリー極の値である。

以上より、式(2)の漸近解は $W = W_1 + W_2 + W_3$ として得られる。

3. 漸近解の性質と精度

図-3は、漸近解の各寄与の程度を示したものである。受振点が浅い ($b = 1$) の場合には極寄与が卓越しているが、深くなる ($b \rightarrow \infty$) とともに鞍部点寄与よりも相対的に小さくなっている。一方、分岐線寄与はいずれの深さでも小さな値となっている。つぎに、式(2)の無限積分（厳密解）を数値積分して、漸近解と比較したものが図-4である。漸近解の性質として、解の精度は α/b および α/c に依存しており、加振源あるいは受振点が深くなるとともに誤差は大きくなっている。深い場合、前図を参照して、鞍部点寄与の精度に関係しているものと考えられる。

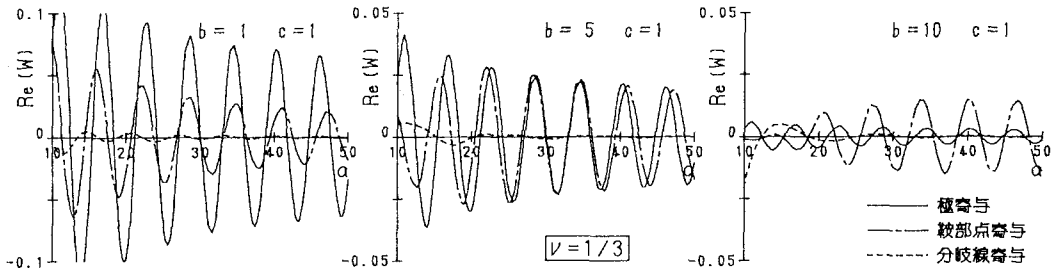


図-3 漸近解の各寄与の程度

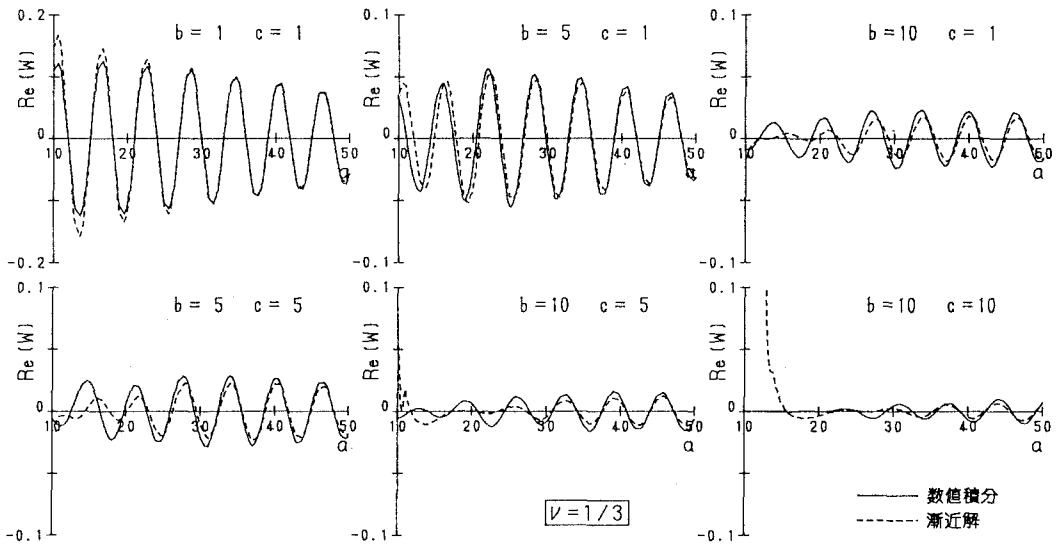


図-4 漸近解と厳密解の比較

文献 1)北村他：土木学会関西支部年講，1989.5. 2)松岡他：日本建築学会論文報告集，No.293，1980.7.