

I-322

せん断振動に対する層体の変位と応答加速度について

日本大学 正 員 能町純雄

日本大学 正 員 阿部 忠

日本大学 正 員 澤野利章

日本大学 学生員○遠山 裕

1. 概 説 振動応答を解析する場合に応力, ひずみ, 変位等を $\sin$ 関数で近似することは一般的な手法である。また, この解析には, ある種の力学モデルを設定して行うことができる。本研究では, 弾性の力学モデルを応力-ひずみ関係が非線形となるバネを有したフォークト体とした場合の振動応答に対して, まず, 非線形バネだけを考えることとし, ある方向の距離の変位を $\sin$ 関数で近似した時々の妥当性についての考察を行う。対象とする構造体は図-1に示すような底盤に対して堅固に固定された層体を考える。これに振動が強制された場合の層体自身の運動方程式は式(1)によって表すことができる。

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

また, 弾性の力学モデルである非線形バネのひずみ r と応力の関係を式(2)とする。

$$\tau = G \left(r - \frac{r^3}{3 r_1^2} \right) \quad (2)$$

ここで, ρ ; 層体の密度,

u ; 強制振動外力による層体の変位,

G ; 層体の初期せん断弾性係数,

r ; 層体に生ずるひずみ, τ ; 層体のせん断応力

r_1 ; 最大せん断応力に対する最大ひずみ

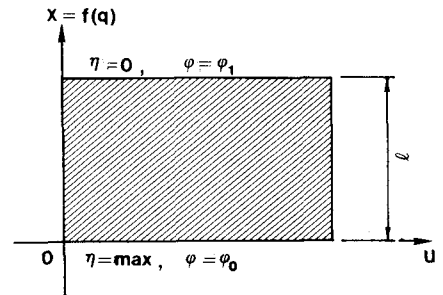


図-1 層体構造

2. 解析方法 層体の一般的な変位とひずみの関係より $r = \partial u / \partial x$ の関係が成り立つ。また, 変位 u は時間 t の関数であることから $u = U \sin \omega t$ とする。よって, ひずみ r は次式で表すことができる。

$$r = \frac{\partial U \sin \omega t}{\partial x} = r_1 \eta \sin \omega t \quad \therefore \eta = \frac{\partial U / \partial x}{r_1}$$

この関係と式(2)から式(1)は式(3)となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta - \frac{\eta^3}{4} \right) = - \frac{\rho \omega^2}{G r_1} U \quad (3)$$

ここで, $U = \ell \phi r_1$, $\xi^2 = \omega^2 \rho \ell^2 / G$ とする。また, 底面からの距離 x を q を係数として表すこととして $x = q \ell$ とすると, 式(3)は式(4)となる。ここで, $\partial \phi / \partial q$ を求めると式(5)となる。

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\eta - \frac{\eta^3}{4} \right) = - \xi^2 \phi \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} = \frac{\partial (U / \ell r_1)}{\partial (x / \ell)} = \frac{\partial U}{\partial x r_1} = \eta \quad (5)$$

次に式(4)に η を乗じ, 式(5)の関係をを用いて, さらに q で積分すると, エネルギー式として式(6)を得る。

$$\int \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial q} \eta - \frac{3}{4} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial q} \eta^3 \right\} \partial q = \int \left\{ - \xi^2 \phi \frac{\partial \phi}{\partial q} \right\} \partial q$$

$$\therefore \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{3}{16} \eta^4 = \frac{1}{2} \xi^2 \phi^2 + C \quad (6)$$

ここで、積分定数Cは境界条件 $q=1$ で $x=l$ 、つまり $\eta=0$ より定まる。すなわち、

$$C = \frac{1}{2} \xi^2 \phi_1^2$$

ここで、 ϕ_1 は表面における ϕ の値

この関係を式(6)に代入することによって η は次式で表される。

$$\eta = \left[\frac{3}{4} \left\{ 1 \pm \left(1 - \frac{3}{2} \xi^2 (\phi_1^2 - \phi^2) \right)^{1/2} \right\}^{1/2} \right] \quad (7)$$

さらに、境界条件を考慮して $\eta=0$ を満足するとき $\phi_1 = \phi$ の場合には、式(7)中の複号はマイナスに限られることから、式(7)は次のようになる。

$$\eta = \frac{\partial \phi}{\partial q} = \left[\frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{3}{2} \xi^2 (\phi_1^2 - \phi^2) \right)^{1/2} \right\} \right]^{1/2} \quad (8)$$

これより次式を得ることができる。

$$\phi_1 \xi \partial q = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} \frac{\{1 + (1 - A^2 \cos^2 \theta)^{1/2}\}^{1/2}}{\cos \theta} \partial \phi \quad (9)$$

$$\text{ここで、} A^2 = \frac{3}{2} \xi^2 \phi_1^2$$

したがって、 ξ は次式によって表すことができる。

$$\xi = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \{ (1 + A \cos \theta)^{1/2} + (1 - A \cos \theta)^{1/2} \} \partial \theta \quad (10)$$

ここで、 $\theta_0 = \sin^{-1}(m)$ 、 $m = \phi_0 / \phi_1$ 、 ϕ_0 ; $q=0$ の場合の ϕ の値

さらに式(10)を積分して展開すると式(11)を得る。

$$\begin{aligned} \xi = & \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)!! A^{2n}}{2n! 2^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{2n}{n} \right) \right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(4n-3)!! A^{2n}}{2n! 2^{2n}} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{2n}{r} \right) \frac{\sin^2(n-r)\theta_0}{2(n-r)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

3. 解析結果 式(11)によって ξ を求めると変数Aと級数項 n 、 r が複雑になるため、本解析では式(10)に対して数値積分を行なって ξ を求めることとしたが、両式の解を比較すると特殊なA、 θ 以外の点において ξ は同値となった。したがって、本解析は数値積分による方法で進める。この ξ 、A、 θ_0 の関係より加速度 α は式(14)によって、また入力加速度パラメータPは式(15)によって算出して図-2に示した。

$$\alpha = A \xi / (3/2)^{1/2} \quad (14)$$

$$P = A \xi m / (3/2)^{1/2} \quad (15)$$

図中の破線が本解析によって得られた応答加速度パラメータ α であり、また実線は $\sin$ 関数によって変位を仮定した場合の応答加速度パラメータである。また、中央部の骨格線から両側に入力Pは、0、0.05、0.10、0.15、0.20である。Pが小さい場合には2線は充分合っているが、Pの増加とともに誤差が大きくなっている。しかし、 $\sin$ 関数を用いた非線形フォクト体においては、Pが大きい場合には、適切な応答が現れないことから、この誤差については影響ないものと思われる。

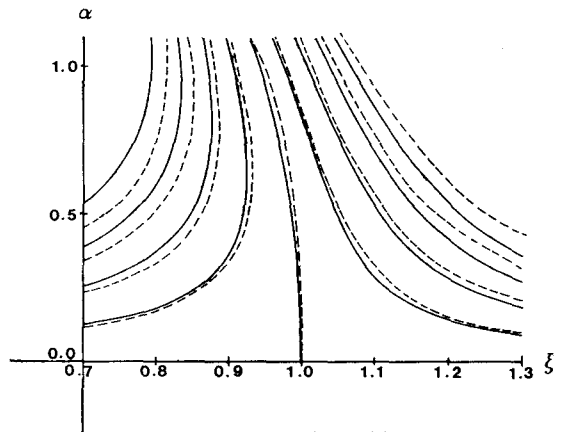


図-2 解析結果