

I-319

周期性軸トルクと軸力を受ける薄肉部材の動的弾性安定性について

山口大学 学生員 今田 安男

山口大学 正 員 會田 忠義

1. まえがき

軽・軟骨組構造物中の一部材は、一般に、構造物全体の振動時に材端の節点を通して周期性軸トルクや軸力を受ける。本報告は、このような部材（部材断面のせん断中心と図心が一致していないフレキシブルな部材）の係数励振不安定振動を調査したものである。著者らは、周期性軸トルクのみが作用する場合の単純パラメトリック共振^{1,2)}と結合共振³⁾について調査してきたが、本研究は周期性軸トルクとともに軸力が作用する場合について調査したものである。単純パラメトリック共振の算出にはBolotin法⁴⁾を、結合共振にはFloquetの定理を用い特性指数の挙動による判定法⁴⁾を適用した。ここでは、溝形断面を有し、Fig.1に示す一端固定他端自由材を対象に調査結果を示す。

2. 基礎方程式

Fig.1に示す外力を受け、振動している部材において、初期応力の概念を導入し、幾何学的非線形振動時の線形化した仮想方程式に直接変分法を適用し基礎方程式⁵⁾を求める。基礎方程式を基準座標で表わすと、次式と表わせる。

$$A\ddot{f} + Bf + (hC_1\cos\omega_1 t + pC_2\cos\omega_2 t)f = 0 \quad \dots(1)$$

式中、 f は基準座標ベクトル、 h は外部トルクの振幅と基準トルク($\bar{m}_T(z)$, $\bar{M}_T$)との比を、 p は外部軸力の振幅と基準軸力($\bar{q}_T(z)$, $\bar{Q}_T$)との比を表わし、 ω_1 及び ω_2 はそれぞれ外部トルク及び軸力の円振動数を表わす。 A : Mass matrix, B : Stiffness matrix, C_1 及び C_2 : Initial stress matrices.

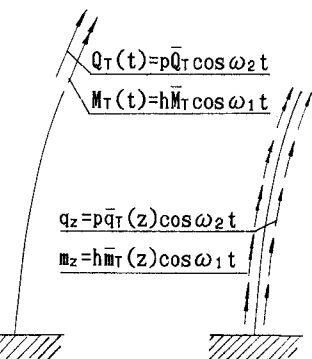


Fig.2 Columns subjected to axial torque and force.

3. 係数励振不安定の算出

トルクと軸力が同時作用するとき、基礎方程式(1)は $\omega_1/\omega_2 = n/m$ (n, m は正の整数)のときのみMathieu方程式になり、係数の周期は $T = n(2\pi/\omega_1) = m(2\pi/\omega_2)$ 、円振動数は $\Omega = \omega_1/n = \omega_2/m$ である。単純パラメトリック共振領域境界における基礎方程式(1)の調和解を次式で与えるとき、

$$f = \sum_{\xi=1}^{\infty} (a_{\xi} \cos \frac{\xi}{2} \Omega t + b_{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \Omega t), \quad f = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\xi=2,4}^{\infty} (a_{\xi} \cos \frac{\xi}{2} \Omega t + b_{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \Omega t) \quad \dots(2)$$

境界振動方程式はBolotin法によれば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} | -\frac{1}{4} \Omega^2 [A]_1 + [B]_1 + \frac{1}{2} h [C_1]_{1a} + \frac{1}{2} p [C_2]_{1a} | &= 0 \\ | -\frac{1}{4} \Omega^2 [A]_1 + [B]_1 + \frac{1}{2} h [C_1]_{1b} + \frac{1}{2} p [C_2]_{1b} | &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots(3)$$

$$\left. \begin{aligned} | -\frac{1}{4} \Omega^2 [A]_{2a} + [B]_{2a} + \frac{1}{2} h [C_1]_{2a} + \frac{1}{2} p [C_2]_{2a} | &= 0 \\ | -\frac{1}{4} \Omega^2 [A]_{2b} + [B]_{2b} + \frac{1}{2} h [C_1]_{2b} + \frac{1}{2} p [C_2]_{2b} | &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots(4)$$

ここで、 $[A]_1$, $[A]_{2a}$, $[A]_{2b}$ は A を含むマトリックス、 $[B]_1$, $[B]_{2a}$, $[B]_{2b}$ は B を含むマトリックス、 $[C_1]_{1a}$, $[C_2]_{1a}$, $[C_1]_{1b}$, $[C_2]_{1b}$ ($i=1,2$)は C を含むマトリックスである。式(3), (4)から与えられた h 及び p に対する不安定領域の境界振動数 Ω が求められる。

結合共振領域についてはHill方程式の一般解を次式で与えるとき、

$$f = e^{\lambda t} \left\{ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\xi=1}^{\infty} (a_{\xi} \cos \xi \Omega t + b_{\xi} \sin \xi \Omega t) \right\} \quad \dots(5)$$

式(5)の存在条件式(6)より、与えられた h と p ならびに Ω に対する特性指数 λ の符号より解の安定・不安定の判定を行ない、領域を算出する。

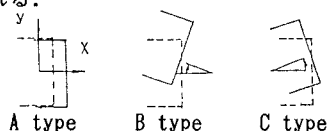


Fig.2 Vibration modes of free end column.

$$| -\Omega^2 [A]_0 + [B] + \frac{1}{2} h [C_1] + \frac{1}{2} p [C_2] + 2 \lambda \Omega [A]_1 + \lambda^2 [A]_2 | = 0 \quad \cdots(6)$$

式中, $[A]_0$, $[A]_1$, $[A]_2$ はAを含み, $[B]$ はBを含み, $[C_1]$, $[C_2]$ はCを含むマトリックスである。

4. 安定図

Table 1に示す固有円振動数を有する溝形断面材について, 軸トルクはせん断中心に, 軸力は図心に作用する場合を想定する。表中の Ω_A , Ω_B , Ω_C は部材の自由端がFig. 2に示すように振動するモードの最低次の固有円振動数を示している。自由端に一定の従動軸力と周期性従動軸トルクが作用する場合 ($\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 0$) の安定図をFig. 3に示す。図中, 横軸には励振振動数 ω ($=\Omega$) を無荷重時の固有振動数 Ω_A で無次元化したもので縦軸は基準トルクを1としたときの h/mL^3 を表わす。m: 部材の単位長さ質量, L: 部材長さ。

Fig. 3より, 単純パラメトリック共振の他に, 差形の結合共振領域が比較的大きく現れ, 前者には軸力引張が, 後者には圧縮が拡大化する影響をもつことが明らかになった。

参考文献

- 1) T.Aida: Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 115, No. 1, 1989, pp. 71-88.
- 2) T.Aida and T.Kusukubo: Journal of Sound and Vibration, Vol. 124, No. 3, 1988, pp. 467-477.
- 3) 曾田・今田: 第38回応用力学連合講演会予稿集, 1989, pp. 271-272.
- 4) V.V. Bolotin: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, inc., 1964.
- 5) T.Aida: Transactions of Canadian Society for Mechanical Engineering, Vol. 9, No. 2, 1985, pp. 75-83.

Table 1 Eigenvalues of column

MODE	Ω_A	Ω_B	Ω_C
rad/sec	32.67	155.68	217.77

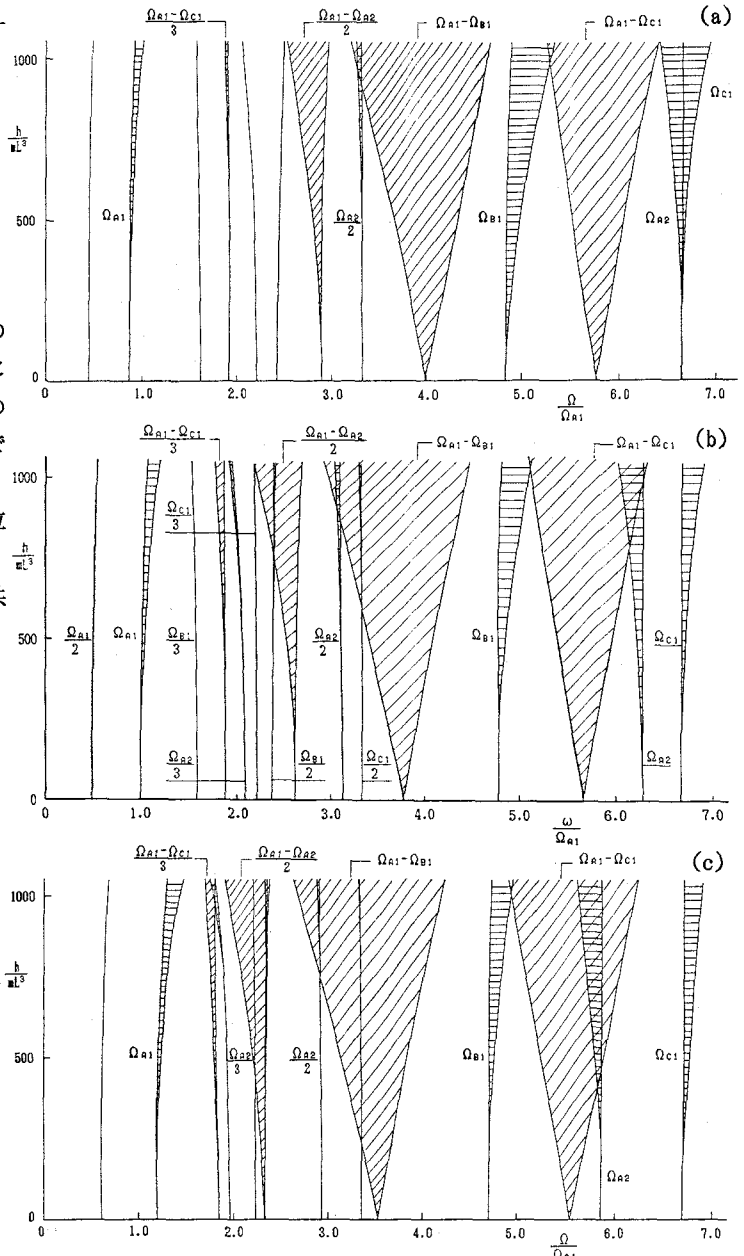


Fig. 3 Unstable regions of a cantilevered member subjected to a concentrated axial follower force and periodic follower torque. (a) $p=800$; (b) $p=0$; (c) $p=-800$.