

## I-313

## 高次キュムラント打ち切り近似による非線形系の不規則振動解析

長崎大学大学院○学生員 竹下 渡

長崎大学工学部 正 員 岡林 隆敏

## 1. はじめに

不規則外力が作用する非線形系の解析には、摂動法、等価線形化法などの準線形的な手法とスペクトル理論あるいは、グリーン関数の理論が用いられている。この手法では、外力のスペクトルが複雑になると解析が極めて煩雑になり、解かれる問題に限界がある。近年、伊藤形の確率微分方程式を基礎とした、効果的な解析が行なわれるようになってきている。そこで、本研究では、外力を白色雑音過程を入力とするフィルター系でモデル化し、外力-構造系を伊藤形の方程式で表現する。この系より高次モーメント方程式を誘導し、高次キュムラント打ち切り近似を行なうことにより、閉じたモーメント方程式を導いている。この手法と比較するために、等価線形化法の解析も行った。

## 2. 非線形系と不規則外力のモデル

非線形方程式として、正規性不規則外力 $r(t)$ を受けるDuffingの方程式を考える。

$$\ddot{y}(t) + 2h\omega\dot{y}(t) + \omega^2(y(t) + \varepsilon y^3(t)) = r(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\omega$ は線形系の固有円振動数、 $h$ は減衰定数および、 $\varepsilon$ は非線形のパラメーターである。

任意の相関を有する正規定常確率過程は、正規性白色雑音過程 $N_z(t)$ を入力とする確率微分方程式の定常解過程として表すことができる。

$$r(t) = CZ(t), \quad Z(t) = AZ(t) + N_z(t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $N_z(t)$ の平均値0で、自己相関関数は $E[N_z(t_1)N_z(t_2)^T] = Qz\delta(t_1 - t_2)$ で表される。なお $E[\cdot]$ は集合平均のための演算子である。ここで、構造系と荷重系を合成した変数

$$X(t) = [y(t) \quad \dot{y}(t) \quad z(t) \quad \dot{z}(t) \quad \dots \quad z(t)^{(n)}]^T \quad \dots\dots\dots (3)$$

を導入する。さらに、白色雑音過程は、Wiener過程の形式的な微分 $dW(t)/dt = N(t)$ であることを考えると、(1)(2)(3)式より、構造-荷重系は、次の伊藤型の確率微分方程式で表される。

$$dX(t) = f(X(t))dt + GdW(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで求める値は、応答 $y(t)$ の分散 $E[(y(t) - E[y(t)])^2]$ である。

a) 外力を白色雑音過程とした場合  $r(t) = n(t)$ であり、 $n(t)$ の確率特性は、次式で規定される。

$$E[r(t)] = 0, \quad E[n(t_1)n(t_2)] = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

b) 外力を狭帯域過程とした場合  $r(t)$ の平均値は0であり、次の様な自己相関関数を有する。

$$E[r(t_1)r(t_2)] = \sigma^2 \exp\{-\beta|t_2 - t_1|\} \cos(\Omega(t_2 - t_1)) \quad \dots\dots\dots (6)$$

## 3. 高次モーメント方程式

$$(4) \text{式において、} X(t) \text{の関数} u(X(t)) \text{を} u(X(t)) = [x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l] \quad \dots\dots\dots (7)$$

とする。伊藤の定理より $u$ の微分は次のように表される。

$$du = \frac{\partial u^T}{\partial X} f dt + \frac{1}{2} \text{tr} G Q G^T \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial X} \right] dt + \frac{\partial u^T}{\partial X} G dW \quad \dots\dots\dots (8)$$

両辺の平均をとり、Wiener過程の性質を用いると、次の高次モーメント方程式が得られる、(2), (3)。

$$\frac{d}{dt} E[u] = E \left[ \frac{\partial u^T}{\partial X} f \right] + \frac{1}{2} E \left[ \text{tr} G Q G^T \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial X} \right] \right] \quad \dots\dots\dots (9)$$

$x(t)$ の確率密度関数 $p(x)$ の特性関数 $\Phi(\theta)$ により、 $x(t)$ のキュムラントは、次式で定義される。

$$K_{x_1 \dots x_n} = (i)^{-\sum x_s} \left. \frac{\partial^{\sum x_s}}{\partial \theta^{x_1} \dots \partial \theta^{x_n}} \ln \Phi(\theta) \right|_{\theta=0} \quad \dots\dots\dots (10)$$

5次以上のキュムラントを0にすることにより、5次以上の高次モーメントを低次のモーメントで表示することができる。

#### 4. 等価線形化法による解析

(1)式と対応する線形な次のような方程式を構成し、残差  $e(y, \dot{y})$  の二乗平均値が最小になるように、等価な固有振動数  $\omega_e$  と減衰定数  $h_e$  を決定する。

$$\ddot{y}(t) + 2h_e\omega_e\dot{y}(t) + \omega_e^2 y(t) + e(y(t), \dot{y}(t)) = r(t) \quad \cdots (11)$$

非線形性が小さいとして、応答  $y(t)$  が正規過程であると仮定すると、 $h_e$  と  $\omega_e$  は次式のように与えられる。

$$h_e\omega_e = h\omega, \quad \omega_e^2 = \omega^2 + 3E[y(t)^2] \quad \cdots (12)$$

この場合、 $f(X(t))$  は  $Ax(t)X(t)$  で表すことができる。構造一荷重系  $X(t)$  の共分散  $R_X(t) = E[X(t)X(t)]$  の応答は、次の共分散方程式に支配されている。

$$\dot{R}_X(t) = A_X(t)R_X(t) + R_X(t)A_X^T(t) + Q_X(t), \quad R_X(t_0) = R_0 \quad \cdots (13)$$

#### 4. 数値解析と考察

図-1は、白色雑音が作用した変位応答の標準偏差の定常応答を示したものである。横軸は外力の標準偏差  $\sigma_n$  である。構造系のパラメータは  $\omega = 1$ 、 $h = 0.05$  であり非線形のパラメータ  $\epsilon = 1$  である。線形の場合は、外力の標準偏差と応答の標準偏差は比例する。非線形応答では、高次モーメントによる解法が等価線形化法より精度が良いとされている。図-2では、 $\sigma_n = 0.5$  の場合の過渡応答を示したものである。 $t = 40$  ではほとんど定常状態になっており、定常応答の値と一致する。

図-3は、狭帯域過程を受ける変位の定常応答を等価線形化法で解き、非線形のパラメータ  $\epsilon$  による変化を示したものである。横軸は系の固有振動数と狭帯域過程の中心周波数の比  $\Omega/\omega$  である。狭帯域過程の  $\beta = \Omega\gamma/\sqrt{1+\gamma^2}$  は、 $\gamma = 0.05$  の値を用いた。 $\Omega/\omega$  に対する変位応答は、非線形の特有の現象である跳躍が見られる。非線形のパラメータ  $\epsilon$  を線形  $\epsilon = 0$  から  $\epsilon = 1$  まで変化させると、応答形状は著しく変化する。図-4は  $\Omega/\omega = 1.55$  と  $1.7$  の非定常応答を、高次モーメント法、等価線形化法、及びシミュレーションについて示したものである。 $\Omega/\omega = 1.55$  では、等価線形化法と高次モーメント法は比較的良好な一致を示すが、 $\Omega/\omega = 1.7$  では高次モーメント法による解析が、妥当な応答を示している。

[参考文献] (1) Arnold, L: Stochastic Differential Equation, Jhon Wiley & Sons, 1973. (2) Ibrahim, R. A. et al., Jour. ASME, Vol. 52, 1985, Dec., pp. 965, (3) Wu, W. F. and Y. K. Lim., Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 19, No. 4, pp. 349, 1984.

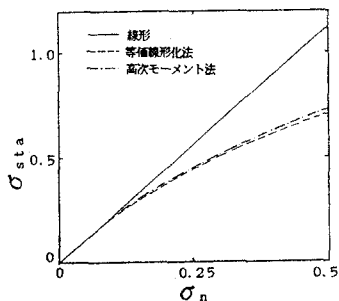


図-1. 白色雑音による定常応答

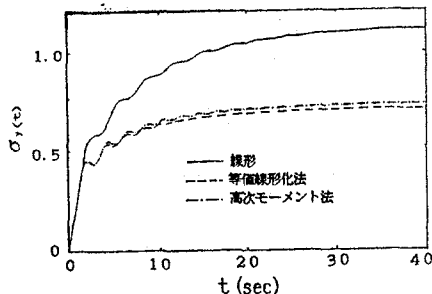


図-2. 白色雑音による非定常応答

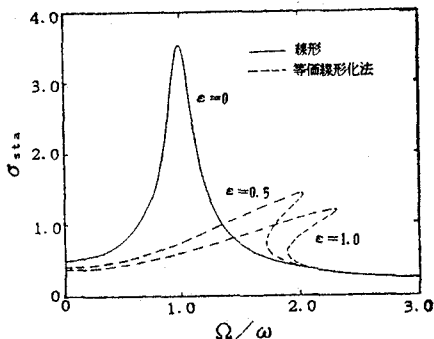


図-3. 狭帯域過程による定常応答

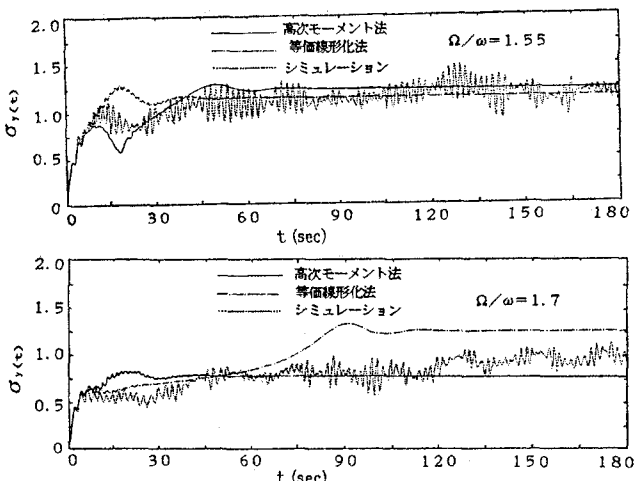


図-4. 狭帯域過程による非定常応答