

1. はじめに

棒の横振動において、せん断力の影響まで考慮した理論(連立偏微分方程式)を与えたのは、周知のようにTimoshenkoである。^{1),2)}いわゆるTimoshenko Beam と呼ばれている理論である。Huangは、等断面の場合について6つの代表的な境界条件のもとでその式を解き、低次側と高次側との2組の振動数方程式と固有関数を与えている。³⁾更に、著者はHuangの解を再検討して低次側の振動数方程式および固有関数から高次側のそれらが誘導できることを明らかにし、高次側のそれらに問題点があることを示唆した。⁴⁾その問題点を明らかにするには進行波の位相速度曲線まで戻り考え直す必要がある。進行波の位相速度曲線についてはPochhammerとCreeが厳密解を与えている。^{5),6)}Timoshenkoの与えたせん断力まで考慮した連立偏微分方程式は、2ndモードまで与えている。1stモードだけが厳密解とよく一致するが2ndモードは全く一致しないこともよく知られている。^{7),8)}ここでいうモードとは軸方向モードではなく横方向モード即ち断面に沿うモードである。同一波長に対して2つの振動数が存在し、1stモードの振動数だけが正しく、2ndモードの振動数は正しくないということである。本論文は進行波と全く同様に定常波(振動)においても同一波長に対して2つの異なる振動数が存在し、1つは進行波の位相速度曲線の1stモードの振動数であり、もう1つは2ndモードの振動数であることを証明し、1stモードの振動数を与える式は低次側の式だけであり、高次側の式は2ndモードの振動数を与えるため、低次側の振動数方程式および固有関数だけが、せん断力まで考慮した実際の振動現象を説明する式であることを明らかにしたものである。計算例としては、同一波長に対して進行波の場合と同様に2つの異なる振動数が端的に表われる単純ばりを選んだ。

2. 計算例

PochhammerとCreeの厳密解と比較するため、断面形状は円形断面とする。Timoshenkoの与えた式を波動方程式と考へ進行波を $y = C \exp\{i(\gamma z - p t)\}$ とすれば、位相速度曲線を表わす式として1stモード y_1 と2ndモード y_2 は次のようになる。

$$y_1 = \frac{2^{1/2}(\pi x)}{\{[1 + (a + 1)(\pi x)^2] + [1 + 2(a + 1)(\pi x)^2 + (a - 1)^2(\pi x)^4]^{1/2}\}^{1/2}} \quad (1)$$

$$y_2 = \frac{2^{1/2}(\pi x)}{\{[1 + (a + 1)(\pi x)^2] - [1 + 2(a + 1)(\pi x)^2 + (a - 1)^2(\pi x)^4]^{1/2}\}^{1/2}} \quad (2)$$

ここで、C:定数、 γ :波動伝達定数、p:円振動数、z:軸方向座標、t:時間座標、 π :円周率、 $x = (d/2)/\lambda$ 、d:円断面の直径、 λ :振動モードの波長、 $y_{1,2} = c/c_0$ 、 $c = p/\gamma$:位相速度、 $\gamma = 2\pi/\lambda$ 、 $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$ 、E:縦弾性係数、 ρ :材料の密度、 $a = E/k'G$ 、 k' :せん断係数、G:横弾性係数。

次に、振動の方程式と考へ固有値を求める。進行波の式(1)、(2)から求まる振動数と固有値から求まる振動数とを比較検討するために、次の2つの無次元量 X 、 X_0 を導入する。

$$X^4 = \frac{p^2 \ell^2}{c_0^2 b^2} \quad (3)$$

$$X_0 = \frac{p \ell}{c_0} \quad (4)$$

ここで、 ℓ :部材長、 $b = \ell/R$ 、 $R = (I/S)^{1/2}$ 、I:横断面の断面2次モーメント、S:横断面の断面積、X:曲げだけを考へた場合の固有値に相当する量、 X_0 :縦振動だけを考へた場合の固有値に相当する量。4階の常微分方程式を解くときに、Xと $b/(a)^{1/4}$ の大小関係により、それぞれの場合について、固有関数が求まる。^{3),4)}即ち、

1) $X < b/(a)^{1/4}$ の場合。(低次側)

$$\left. \begin{aligned} u &= C_1 \sin \alpha \xi + C_2 \cos \alpha \xi + C_3 \operatorname{sh} \beta \xi + C_4 \operatorname{ch} \beta \xi \\ \theta &= \frac{A}{\alpha} \left(C_1 \cos \alpha \xi - C_2 \sin \alpha \xi + C_3 \frac{1}{\mu \delta} \operatorname{ch} \beta \xi + C_4 \frac{1}{\mu \delta} \operatorname{sh} \beta \xi \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2) $X > b/(a)^{1/4}$ の場合。(高次側)

$$\left. \begin{aligned} u &= C_1 \sin \alpha \xi + C_2 \cos \alpha \xi + C_3 \sin \beta' \xi + C_4 \cos \beta' \xi \\ \theta &= \frac{A}{\alpha} \left(C_1 \cos \alpha \xi - C_2 \sin \alpha \xi + C_3 \frac{1}{\mu' \delta'} \cos \beta' \xi + C_4 \frac{1}{\mu' \delta'} \sin \beta' \xi \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、 $u = Y/\ell$ 、Y:全たわみ、 θ :曲げだけによるたわみ角、 $\xi = z/\ell$ 、 $C_1 \sim C_4$:定数

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2^{1/2}} \frac{X^2}{b^2} \left[(a + 1) + \{(a - 1)^2 + 4 \left(\frac{b}{X}\right)^4\}^{1/2} \right]^{1/2} \\ \beta &= \frac{1}{2^{1/2}} \frac{X^2}{b^2} \left[-(a + 1) + \{(a - 1)^2 + 4 \left(\frac{b}{X}\right)^4\}^{1/2} \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\beta' = \frac{1}{2^{1/2}} \frac{X^2}{b^2} \{ (a+1) - \{ (a-1)^2 + 4 \left(\frac{b}{X} \right)^4 \}^{1/2} \}^{1/2} \quad (8)$$

$$A = \alpha^2 - a X^4 / b^2, \quad B = \beta^2 + a X^4 / b^2, \quad \mu = \beta / \alpha, \quad \delta = A / B, \quad B' = \beta'^2 - a X^4 / b^2, \\ \mu' = \beta' / \alpha, \quad \delta' = A / B'$$

表1は式(5), (6)を用いて求めた $b = 10$ の場合の X の値である。図1はその X に対応する全たわみ u のモードカーブである。 $E = 2(1 + \nu)G$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、 $k' = 0.833$ とした。 $b = 10$ のとき、 $b / (a)^{1/4} = 7.5235$ となるので、表1において低次側の式(5)からは3rdまでしか求まらない。図1のモードカーブからわかるように1stから3rdまでと同じ波長のモードカーブが5th, 7th, 9thに現われている。半波長、1波長、1.5波長である。1stから3rd、5th, 7th, 9thの振動数が進行波の位相速度曲線の第1分枝式(1)と第2分枝式(2)とから求めた振動数にそれぞれ相当することを証明する。そのために、式(1), (2)の $y_i (i=1,2)$ を次のように変形する。

$$y_i = \frac{c}{c_0} = \frac{1}{c_0} \cdot \frac{p}{r} = \frac{1}{c_0} \cdot \frac{p}{2\pi/\lambda} = \frac{p}{c_0} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \quad (9) \\ (\because c = p/r, \quad r = 2\pi/\lambda)$$

一方、式(3)、(4)から

$$X_0 = \frac{X^2}{b} \quad \text{即ち} \quad \frac{p \ell}{c_0} = \frac{X^2}{b} \quad (10)$$

1stと5th、2ndと7th、3rdと9thのうちどれを取り出しても同じことなので、1stと5thの場合の計算を行う。1stおよび5thでは λ は半波長なので、

$$\lambda = \frac{\ell}{1/2} = 2\ell \quad (11)$$

式(11)を式(9)に代入すれば、

$$y_i = \frac{p}{c_0} \cdot \frac{2\ell}{2\pi} = \frac{p \ell}{c_0} \cdot \frac{\ell}{\pi} \\ \therefore \frac{p \ell}{c_0} = \pi y_1, \quad \frac{p \ell}{c_0} = \pi y_2 \quad (12)$$

式(10)は振動の方からの $p \ell / c_0$ を与え、式(12)は波動の方からの $p \ell / c_0$ を与える。したがって、両者が一致するかしないかを調べればよい。

$b = 10$ の場合の半波長の場合は

$$\left. \begin{aligned} \pi y_1 &= 0.838702, \quad \pi y_2 = 6.660837 \\ (X_0)_1 &= 0.838699, \quad (X_0)_5 = 6.660835 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となり、1stは式(1)の進行波の第1分枝、5thは進行波の第2分枝の振動数であることが式(13)から明らかにわかる。

3. 結論

進行波と同じく振動(定常波)の場合にも第2モード(断面の沿うモード)の解が含まれてくる。式(8)の β' が第2モードの振動数を与える。故に、単純ばりの固有関数 $y = C \sin \alpha \xi$ 以外は必ず超越関数 $\sinh \beta \xi$ と $\cosh \beta \xi$ を含むので、せん断力まで考慮したTimoshenkoのはり理論での固有関数は低次側の式(5)だけであり、高次側の式(6)は現実の振動現象を表す式ではない。また、固有値 X は $b / (a)^{1/4}$ まで求めることができる。この計算には、東北大学と東大の大型計算機センターのACOS S-2000とHITAC M-680/682Hとを使用した。

参考文献

- 1) Timoshenko, S.P., Phil. Mag. Ser. 6, 41(1921)744-46
- 2) Timoshenko, S.P., Phil. Mag. Ser. 6, 43(1922)125-31
- 3) Huang, T.C., J. Appl. Mech., 28, 4(1961)579-84
- 4) 磯山和男, 八戸工大紀要, 7(1988)83-8
- 5) Pochhammer, L., J. rein angew. Math., 81(1876)324-36
- 6) Chree, C., Trans. Cambridge. Phil. Soc., 14(1889)250
- 7) Kolsky, H., Stress Waves In Solids, Dover, New York, (1963)68-73
- 8) Fung, Y.C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1965)319-25

表1

次数	固有値 X
1	2.89603271
2	5.03423586
3	6.64236601
4	7.94264948
5	8.16139359
6	9.05025026
7	9.38997038
8	10.02722924
9	10.67495954
10	10.90982478

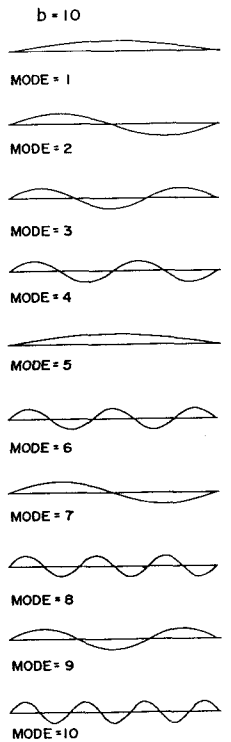


図1 モードカーブ