I-310　はさみ込み法による一層連続ラーメンの自由振動解析

鳥取大学　正員　神部　俊一
鳥取大学　正員　○山本　真二
鳥取大学　　　　市川　章夫

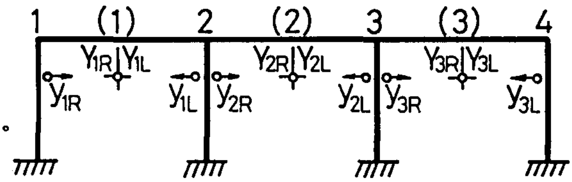
1．まえがき

還元法は、行列演算により鎖状構造物を任意の境界条件のもとで解析できる実用性に富んだ解法である。しかし、この解法によって上記の構造物の曲げ自由振動を解析する場合[1]には、双曲線関数の影響で桁落ちによる誤差を生じるのが問題となる。　そこで、この誤差を低減するために還元法を改良した“はさみ込み法”を用いること[2]を提案する。　本報では節点変位のある一層連続ラーメンを構造モデルとして取り上げ、これにはさみ込み法を適用して解析すれば、曲げ自由振動の性状が明らかにできることを示す。

2．解析方法

1）一層ラーメンの格間行列と格点行列[3]

図－1に示す構造モデルを解析するに当たり次の仮定を設ける。(1)軸方向の剛性は無限大とする。(2)各部材はその全長に渡って一様な断面を有する。単一部材の曲げ自由振動を支配する微分方程式の一般解は部材軸方向の座標をzとすると次式で与えられる。



図－1　解析用構造モデル

$$V(z)=A\cosh\bar{\lambda}\frac{z}{\ell_0}+B\sinh\bar{\lambda}\frac{z}{\ell_0}+C\cos\bar{\lambda}\frac{z}{\ell_0}+D\sin\bar{\lambda}\frac{z}{\ell_0} \tag{1}$$

ここに、$\bar{\lambda}^4=\dfrac{m\omega^2}{EI_0}\ell_0^4$　　EI_0:基準曲げ剛性　　ω：固有円振動数　　(2)
m：基準単位長さ質量　ℓ_0：基準部材長

A，B，C，D：積分定数　　　V（z）：たわみ

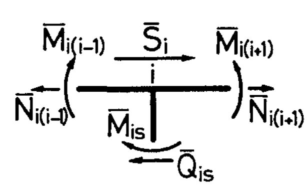
なお、無次元化された量であることを示すために、上付きの横棒記号を用いることにする。　これを用いて部材の曲げ自由振動を還元法により定式化し、さらに図－1における任意のはり部材 i （i＋1）の両端のたわみが零であることを利用すると、たわみ角及び曲げモーメントを成分とする状態量ベクトル $(\bar{\theta}_i\ \bar{M}_i)^T$ と $(\bar{\theta}_{i+1}\ \bar{M}_{i+1})^T$ との間に一次関係を与える遷移行列 $\bar{F}_i$ が誘導できる。　また、はり部材両端の軸方向の変位と力を成分とする状態量ベクトル，$\bar{y}_i^*=(\bar{u}_i,\bar{N}_i)^T$, $\bar{y}_{i+1}^*=(\bar{u}_{i+1},\bar{N}_{i+1})^T$ は単位行列 $\bar{E}$ を用いて、次式で関係付けられる。

$$\bar{y}_{i+1}^*=\bar{E}\,\bar{y}_i^* \tag{3}$$

従って、$\bar{F}_i$ に $\bar{E}$ を付け加えたものが一層ラーメンの格間行列となる。　次にはり部材の軸方向変位に伴う慣性力Sについて考える[4]。　これは、はり部材の水平方向の剛体運動によって生じるもので、はり部材の総質量をMとすると次式で与えられる。

$$S=M\omega^2\ u \tag{4}$$

Sは部材軸直角方向の変位及び力成分とは独立であるので、これを分割区間に配分して各節点における飛躍量として取り扱う。　そこで、図－2に従って力の釣り合い条件式を立てれば節点変位による影響を考慮に入れた格点行列を導くことができる。　なお、柱部材からの飛躍量 $\bar{M}_{is}$，$\bar{Q}_{is}$ を柱上端の変位成分で表せば、これらをはり部材における $\bar{u}$ および $\bar{\theta}$ の関数として処理できる。



図－2　節点 i における断面力と慣性力

2）はさみ込み法による自由振動解析

図－1に示す構造モデルを3つの部分構造に分割し、それぞれの部分構造の両端から還元法による演算を行い、各部分構造の中間部における状態量ベクトルを算出する。

部分構造（ｉ）（ｉ＝１，２，３）に関する状態量ベクトルに対して次の関係式が成立する。

$$\overline{\mathbf{Y}}_{iL}=\overline{\mathbf{N}}_{iL}\overline{\mathbf{y}}_{iL},\quad \overline{\mathbf{Y}}_{iR}=\overline{\mathbf{N}}_{iR}\overline{\mathbf{y}}_{iR},\quad \overline{\mathbf{Y}}_{iL}=\overline{\mathbf{C}}_{0}\ \overline{\mathbf{Y}}_{iR} \qquad (5)_{1\sim3}$$

ここに、$\overline{\mathbf{Y}}_{iL}$，$\overline{\mathbf{Y}}_{iR}$：部分構造（ｉ）の左端と右端から求められた中間部における状態量ベクトル

$\overline{\mathbf{y}}_{iL}$，$\overline{\mathbf{y}}_{iR}$：部分構造（ｉ）の両端における初期状態量ベクトル

$\overline{\mathbf{N}}_{iL}$，$\overline{\mathbf{N}}_{iR}$：境界行列と格間行列との乗算により求まる伝達行列

$\overline{\mathbf{C}}_{0}$　：左端と右端から求められた状態量ベクトルを関連付ける役割をする接続行列

ここで、式（５）$_{1\sim3}$ の関係式と格点行列より求まる分割点２，３における状態量ベクトルに対して成立する関係式を利用すると、分割点の状態量$\overline{\mathbf{y}}$を未知量とする１２元の同次連立一次方程式Ｋ（$\overline{\lambda}$）$\overline{\mathbf{y}}$＝０が得られる。これより、超越的な振動数方程式が次式で与えられる。

$$\det K(\overline{\lambda})=0 \qquad (6)$$

ここに、Ｋ（$\overline{\lambda}$）は無次元変数$\overline{\lambda}$に従属する成分を持つ係数行列である。 従って、この式（６）を満足する$\overline{\lambda}$から、低次から高次までの固有円振動数と、それらに対応する自由振動モードとが算出できる。

３．数値計算例

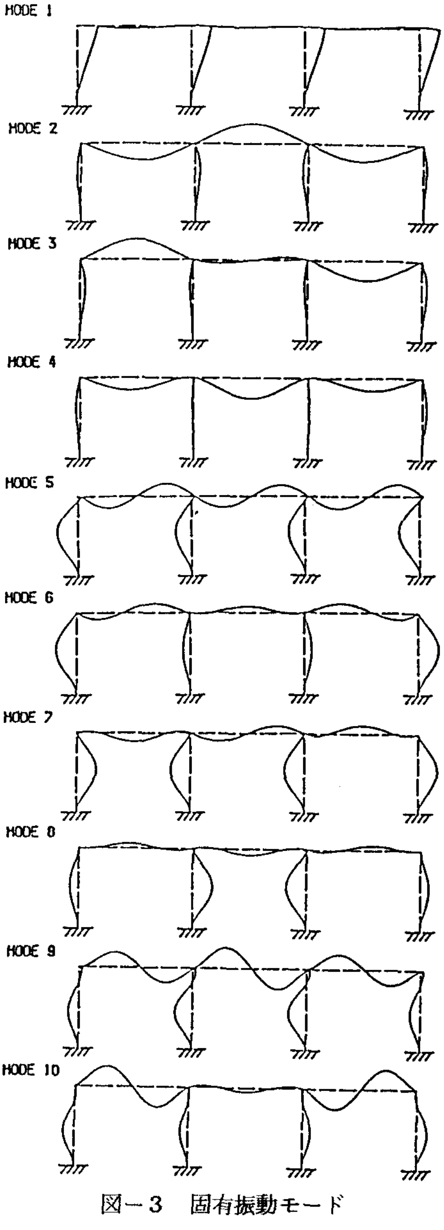
以上の解析方法を構造モデルに適用して数値計算を行った。柱部材の長さは ℓ、支間長も全て１．４ℓ とした。 また、全ての部材において密度と断面積は一定とし、はり部材の曲げ剛性は柱部材の２倍とした。 表－１に自由振動の固有値$\overline{\lambda}$を図－３に１次から10次までの固有振動モードを示す。 なお、固有円振動数ωは$\overline{\lambda}$を式（２）に代入すれば求まる。

４．あとがき

本研究は節点変位のある一層連続ラーメンの自由振動をはさみ込み法を用いて解析した。 この解法を用いることによって双曲線関数項に起因する数値誤差を低減することができ、所要の計算精度で高次の自由振動を解析できる。 今後は本解法と有限要素法による解析結果と比較して、両解法の間に存在する利点と欠点とを明らかにする必要があると考えている。

表－１　自由振動の固有値

ＭＯＤＥ	$\overline{\lambda}$
1	１．５７０９５
2	２．６５５７２
3	２．８６２９７
4	３．１８３８４
5	４．２４０３９
6	４．２５０７７
7	４．４２１０３
8	４．５０４７２
9	５．１８９８４
１０	５．２７３７３



図－３　固有振動モード

参考文献）

１）Ｒ．ツルミュール著，瀬川冨士，高市成方共訳：マトリクスの理論と応用，ブレイン図書出版,pp. 362～366

２）神部俊一，田中善昭，甲斐龍二：はさみ込み法による多室断面鋼製箱桁の断面変形挙動解析，構造工学論文集VOL.34A pp. 101 ～110

３）　１）と同じ　pp. 403 ～418

４）Clough.R.W ,PENZIEN.J : Dynamics of Structures , McGRAW―HILL BOOK COMPANY ,pp. 353～355