I-292　上路式アーチ橋の立体強制振動解析

信州大学　夏目正太郎
信州大学　石川清志

さきに平面的構造の場合について解析結果を示した。その続報として固有マトリクス法による強制振動解析を取り上げる。考え方は同じで、骨組構造物の挙動は部材のそれぞれの挙動が集積して全体挙動として観測される。故に部材の３次元的挙動として、軸方向のたて振動とその周りのねじれ振動、これらに加えて軸に直角な２方向のたわみ振動をもって部材の３次元挙動を表すことにする。これらを示す斉次微分方程式は次の通りである。

たて振動：
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad c_1 = \frac{\gamma A L^2}{g E A} \tag{1}$$

$$u = [\cos\lambda\rho \quad \sin\lambda\rho]\, \mathbf{N}_1 \exp i\omega t \qquad \lambda^2 = c_1 \omega^2 \tag{2}$$

ねじれ振動：
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - c_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \qquad c_2 = \frac{\gamma A j^2 L^2}{g G J} \tag{3}$$

$$\phi = [\cos\mu\rho \quad \sin\mu\rho]\, \mathbf{N}_2 \exp i\omega t \qquad \mu^2 = c_2 \omega^2 \tag{4}$$

たわみ振動：
$$\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad c_3 = \frac{\gamma A L^4}{g E I} \tag{5}$$

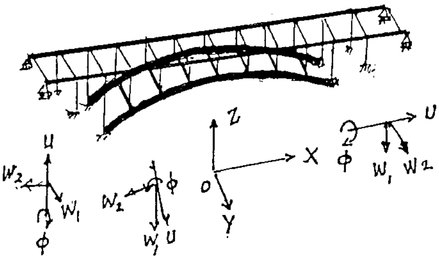
$$w = [\cos\nu\rho \quad \sin\nu\rho \quad \cosh\nu\rho \quad \sinh\nu\rho]\, \mathbf{N}_3 \exp i\omega t \tag{6}$$

直角２方向のたわみ：w_1, EI_1, w_2, EI_2,　$\nu_1^4 = c_{31}\omega^2$, $\nu_2^4 = c_{32}\omega^2$ (7)
ここに
$$\rho = x / L. \tag{8}$$

外力が作用する時には非斉次解を得るための非斉次微分方程式を必用とするが、固有マトリクス法では荷重マトリクスを用いることで外力を入れられる。故に微分方程式は斉次解と同じでよい。

今、部材の状態量を変位 $\mathbf{U}(\rho)$ と、断面力 $\mathbf{V}(\rho)$ とに分けて置く。

$$\mathbf{U}(\rho) = \begin{bmatrix} u \\ w_1 \\ w_2 \\ \phi \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}(\rho) = \begin{bmatrix} F \\ S_1 \\ S_2 \\ T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$



状態量　$\mathbf{W}(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2\ \rho)$　は斉次解と非斉次解との和で表される。外力が　$\sin pt$　なる調和振動であれば

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{N}_1\quad \mathbf{N}_{31}\quad \mathbf{N}_2\quad \mathbf{N}_{.2}\} \tag{10}$$

とすれば、状態量は

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2\ \rho) &= \mathbf{D}(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2)\ \mathbf{R}(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2\ \rho)\ \mathbf{N}\ \exp i\omega t \\ &\quad + \mathbf{D}(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2)\ \mathbf{R}(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2\ \rho)\ [\mathbf{N} + \langle \mathbf{K}(\kappa) \rangle]\ \sin pt\end{aligned} \tag{11}$$

となる。ここで斉次解からは、支点条件、連続条件、平衡条件から未定常数群　$\mathbf{N}_0$（汎通マトリクス）を消去した行列式を解くことにより固有振動数をうるし、非斉次解からは同様な条件で固有マトリクス　$\mathbf{N}_0$（汎通マトリクス）を確定することになる。

斉次解で振動の固有値が得られれば、その固有値を用いれば、その時の係数マトリクスは正則であるから、これら未定常数群の中の１個と残りのそれらとの比を求めることは出来る。そこで特定の未定常数を　Ω　とすれば、固有値　ωn　毎に比の値は決まり

$$\mathbf{N}_0 n = \mathbf{P}(\omega n)\ \Omega n \tag{12}$$

で表され、このΩのみが未定のまま残ったかたちで、状態量は

$$\begin{aligned}\mathbf{W}r(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2\ \rho) &= \mathbf{D}r(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2)\ \mathbf{R}r(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2\ \rho)\ \mathbf{G}r\mathbf{P}(\omega n)\ \Omega n\ \exp i\omega t \\ &\quad + \mathbf{D}r(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2)\ \mathbf{R}r(\lambda\ \mu\ \nu_1\ \nu_2\ \rho)\ [\mathbf{G}r\mathbf{N}_0 + \langle \mathbf{K}(\kappa) \rangle]\ \sin pt\end{aligned} \tag{13}$$

の如く示される。

この未定常数　Ω　は初期条件で決定するものである。すなはち静止の状態から強制的に振動が開始されれば、状態量の初期値としては、全体座標３方向の変位ならびに変位速度をゼロとするのがよい。ここでこれら３方向の変位をフーリエー級数で展開して項数毎に整理すれば　Ωn　に関する連立方程式を書くことが出来る。ただし

$$\Omega n\ \exp i\omega t = \Omega_1 n\ \cos\omega t + \Omega_2 n\ \sin\omega t \tag{14}$$

の様に時間項を実数化すると、変位がゼロになる条件で　$\Omega_1 n$　の項は消去され、第２項のみで変位速度がゼロなる条件を表すことになる。

$$\begin{bmatrix} Ax_{11} & Ax_{12} & Ax_{13} & Ax_{14} & & Ax_1 n \\ Ay_{11} & Ay_{12} & AY_{13} & Ay_{14} & & Ay_1 n \\ Az_{11} & Az_{12} & Az_{13} & Az_{14} & & Az_1 n \\ & & & & & \\ Axm_1 & Axm_2 & Axm_3 & Axm_4 & & Axmn \\ Aym_1 & Aym_2 & Aym_3 & Aym_4 & & Aymn \\ Azm_1 & Azm_2 & Azm_3 & Azm_4 & & Azmn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \Omega_{21} \\ \omega_2 \Omega_{22} \\ \omega_3 \Omega_{23} \\ \omega_4 \Omega_{24} \\ \\ \\ \omega n \Omega_2 n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pBx_1 \\ pBy_1 \\ pBz_1 \\ \\ pBxm \\ pBym \\ pBzm \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

この連立方程式を解けばもはや未定常数は無いので各部材各点における３次元的状態量を時間と共にその変化を求めることが出来る。固有マトリクス法による骨組構造物の解析は静的であれ、動的であれ汎通マトリクスを連続条件、平衡条件、境界条件で如何に精度良く求めるかに掛っており、微小変形理論においてはほぼ満足しうる解をもとめることができる。

参考文献：谷本　勉之助 著　マトリクス構造解析　日刊工業新聞社発行　昭和５５年