

I-271 感度解析を用いた逆解析による はり構造物の剛性推定

東洋大学 学生員○台原 直 東洋大学 正員 新延泰生
東洋大学 正員 矢島基臣 東京電機大学 正員 松井邦人

1. まえがき

感度解析手法によれば、構造物の既知の応答量をもとにして、構造物の未知の断面剛性を推定することが可能である。すなわち、感度解析は、この通常と逆の解析である逆解析問題に対する一つの解析手法となる。本研究では、感度解析手法を用いた最小自乗法にもとづく剛性の推定方法を提示し、その信頼性を検討するものである。

2. 感度解析手法による剛性推定方法

変位法による静的な状態方程式は一般に次のように示される。

$$[K] \{Z\} = \{F\} \quad (1)$$

ここに $[K]$ は剛性マトリックス ($n \times n$)、 $\{Z\}$ は節点変位ベクトル ($n \times 1$)、 $\{F\}$ は節点外力ベクトル ($n \times 1$) を表す。本研究では、変位は測定されており既知のものとし、式(1)の関係をj用いて未知剛性の推定を行う。また、測定変位ベクトルを $\{d\}$ ($l \times 1$) とする。測定変位の個数 l は推定する部材の要素数以上必要であることから、要素構成上推定すべき要素の個数は l 以下としなければならない。解析変数 $X_i, i=1, \dots, m$ (断面積、断面二次モーメント) の微小変動に対して式(1)の両辺の第一変分をとると、

$$[K] \{\delta Z\} + \left[\frac{\partial K}{\partial X_i} \right] \{Z\} \delta X_i = \left\{ \frac{\partial F}{\partial X_i} \right\} \delta X_i \quad (2)$$

$\{Z\}$ を従属変数と考え独立な解析変数 $\{X_i\}$ で表すと、 $\{\delta Z\}$ は $\{\partial Z / \partial X_i\} \delta X_i$ で表され、ベクトル $\{F\}$ が解析変数 $\{X_i\}$ の関数でない場合を考えると $\{\partial F / \partial X_i\} = 0$ となり、

$$[K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial X_i} \right\} = \left[\frac{\partial K}{\partial X_i} \right] \{Z\} \quad (3)$$

の式が得られる。ここに $\{\partial Z / \partial X_i\}$ が、 i 部材の解析変数 X_i の微小変動に対する各変動量すな

わち感度係数である。式(3)は式(1)とその形が似ていることから、有限要素法の解法ルーチンがそのまま使え、 $\{\partial Z / \partial X_i\}$ が簡単に求まる。

Z_i に対応する測定変位を d_i とし、測定変位に含まれる誤差を e_i すると、

$$d_i = Z_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial Z_i}{\partial X_j} \delta X_j + e_i \quad (4)$$

となる。変動量 δX_j は、 $\frac{1}{2} \sum e_i^2$ が最小となるように決定すればよい。すなわち、

$$m \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \left(Z_i - d_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial Z_i}{\partial X_j} \delta X_j \right)^2 \quad (5)$$

となる。ただし、要素数以上の測定変位が必要である。また、式(5)の必要条件は、

$$\sum_{i=1}^l \left(Z_i - d_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial Z_i}{\partial X_j} \delta X_j \right) \frac{\partial Z_i}{\partial X_k} = 0 \quad (k=1, \dots, m)$$

である。上式を整理して、

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^l \frac{\partial Z_i}{\partial X_j} \frac{\partial Z_i}{\partial X_k} \right) \delta X_j = - \sum_{i=1}^l (Z_i - d_i) \frac{\partial Z_i}{\partial X_k} \quad (6)$$

を得る。式(6)は δX_j に関する $m \times m$ の連立方程式(正規方程式)である。 δX_j が求まると、 X_j を補正して新たに計算を繰り返す。この反復回数を少なくし、解析の精度を向上させるために解析変数の逆数で定式化すると、式(6)は、

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^l \frac{\partial Z_i}{\partial X_j} \frac{\partial Z_i}{\partial X_k} \right) \frac{\beta_j}{1 + \beta_j} X_j = - \sum_{i=1}^l (Z_i - d_i) \frac{\partial Z_i}{\partial X_k} \quad (7)$$

となる。ここで、 β_j は剛性変動率を表し、式(7)より剛性変動率を求めればよいことになる。

3. 解析例

解析例として、図1に示すような切り欠き部分を持つ単純ばりのはり中央に集中荷重を載荷したもの

を考え、変位より切り欠き部分の剛性の推定を行った。部材の断面二次モーメントは表1に示すように設定して解析し、図1に示す $\delta 1 \sim \delta 3$ の変位を求めこの変位を測定値とし表2に示す。この測定値に誤差を与えたものと、その値を三次曲線に合わせる最小自乗処理を行ったものについて、その変位よりそれぞれ切り欠き部分の剛性の推定を行った。与える誤差については表3に示し、誤差を与えただけのものをA、その値を最小自乗処理したものをBとし、それぞれCASE1-A、CASE1-Bのように表す。切り欠き部分の初期断面二次モーメントは切り欠き部分以外と同じ $I_0=50.50\text{cm}^4$ とし、収束条件は剛性変動率 β が0.001以下となったときとして解析を行った。推定された断面二次モーメントと設定した断面二次モーメントとの対比を表4に示す。

解析の結果より、測定値に誤差がない場合(CASE0)は、推定結果と設定した断面二次モーメントは一致することがわかる。切り欠き部分がある位置での測定値 $\delta 2$ に誤差が含まれる場合(CASE1, 2)と、切り欠き部分以外の位置での測定値 $\delta 1$ 、 $\delta 3$ に誤差が含まれる場合(CASE3, 4, 9, 10)とを比較すると、切り欠き部分がある位置での測定値に誤差が含まれている場合の方が推定結果に及ぼす誤差の影響が大きいことがわかる。また、数学的に三次曲線に合う最小自乗処理を行った場合、誤差が少なくなる場合と多くなる場合とがあることがわかった。反復回数は、どのCASEの場合も1回で収束をした。

4. まとめ

感度解析手法を用いた最小自乗法にもとづく剛性推定方法を示し、その有効性を確認することができた。今後は、実測データをもとに更に検討をする予定である。

参考文献

- 植野・新延・矢島・榎本：感度解析による剛性推定のモデル実験、第42回土木学会、1987年9月
- 有賀・松井：逆解析によるトラス構造物の剛性推定、第43回土木学会、1988年10月

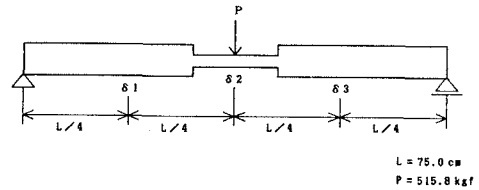


図1 解析モデル

表1 部材の断面二次モーメント

	①	②	③
断面二次モーメント	50.50	10.89	50.50

(cm^4)

表2 変位の測定値

	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$
測定値	713.50	1186.00	713.50

(1/1000 mm)

表3 測定値に与える誤差

CASE	測定値
CASE 0	$\delta 2$ に+10%
CASE 1	$\delta 2$ に-10%
CASE 2	$\delta 1$ 、 $\delta 3$ に+10%
CASE 3	$\delta 1$ 、 $\delta 3$ に-10%
CASE 4	$\delta 1$ 、 $\delta 2$ 、 $\delta 3$ に+10%
CASE 5	$\delta 1$ 、 $\delta 2$ 、 $\delta 3$ に-10%
CASE 6	$\delta 1$ 、 $\delta 3$ に+10%、 $\delta 2$ に+10%
CASE 7	$\delta 1$ 、 $\delta 3$ に+10%、 $\delta 2$ に-10%
CASE 8	$\delta 1$ に+10%
CASE 9	$\delta 1$ に-10%
CASE 10	$\delta 3$ に+10%

表4 切り欠き部分の剛性推定結果

CASE	$I_{\text{est}} (\text{cm}^4)$	ERROR (%)	CASE	$I_{\text{est}} (\text{cm}^4)$	ERROR (%)
0-A	10.89	0.00	1-B	10.36	-4.87
1-A	10.15	-6.80	2-B	11.85	8.82
2-A	11.76	7.99	3-B	10.43	-4.22
3-A	10.34	-5.05	4-B	11.77	8.08
4-A	11.51	5.69	5-B	9.80	-10.01
5-A	9.67	-11.20	6-B	12.67	16.35
6-A	12.48	14.60	7-B	10.98	0.83
7-A	10.68	-1.93	8-B	11.13	2.20
8-A	11.11	2.02	9-B	10.68	-1.93
9-A	10.56	-3.03	10-B	11.46	5.23
10-A	11.25	3.31			

(注) $\text{ERROR} = (I_{\text{est}}/I_{\text{real}} - 1) \times 100$