I-164　適合型重要サンプリング法

武蔵工業大学　正会員　星谷　勝
武蔵工業大学　学生員　斉藤　忠
武蔵工業大学　正会員　丸山　収

1．目的

本研究はカルマンフィルタを用いて重要サンプリング法を適合型に変換した手法を開発し、それが構造システムの破壊確率算定に有効な手法となることを示したものである。本手法は、設計確率変数の任意確率密度関数と確率変数間の相関係数、および破壊モードの性能関数$g_j(\underline{x})$;$j=1\sim m$を与条件として、重要サンプリング密度関数$h(\underline{x})$を用いて効率的に確率変数のサンプル値$\underline{x}_i$を抽出し、次式より確率変数Z のサンプル値を求める。

$$Z_i=\min\{g_1(\underline{x}_i),g_2(\underline{x}_i),\cdots,g_m(\underline{x}_i)\} \qquad (1)$$

不等式$Z_i\leqq 0$はany $g_j(\underline{x}_i)\leqq 0$と等価であるから構造システムの破壊を意味する。したがって、十分な回数のサンプリングを実行すれば、Z_iが負となった回数を総サンプリング回数で除すことにより破壊確率は推定される。これは一般的な重要サンプリング法でありバッチ処理型であるが、この部分を適合型に修正するのが本手法である。構造システムの破壊確率は非常に小さい値であることが知られているので、$Z_i\leqq 0$ となることはまれであり、Z の確率分布関数の裾の形状は負の方向へ指数関数型の減少関数となることが想像できる。そこでこの範囲のZ の確率分布関数を$F(z,a_1,a_2,\cdots)$;a_iは未知定数，として先験的に設定しておく。そしてサンプリング開始と同時にZ_i を用いてZの確率分布関数実験値を作成し、$F(z,a_1,a_2,\cdots)$とのfittingを行う。この操作はカルマンフィルタの本領であるからサンプリング毎に漸化的に推定関数は改良されていく。サンプリング開始と同時に破壊確率は (2)式で算出されるが、未知定数a_iが安定した値に収束した時点で計算は終了する。

$$Pf=F(0,a_1,a_2,\cdots) \qquad (2)$$

以上の方法は、従来のサンプリング法[1)-7)] で有効利用していなかった分布関数に関する情報を利用し、”点推定”に代わって”関数推定”にすることにより、①安定且つ効率的な収束を求めている。さらに、②適合型推定なので適切な判断基準を設けておけば、最適なサンプリング回数が自動的に充足されることになる。これより本手法は精度を保持しつつ計算の効率化を向上させたサンプリング手法となっている。　さらに、③カルマンフィルタの出力の誤差共分散値より推定誤差の評価も可能となる。

なお、本研究では$Pf=P\{\text{any } g_j(\underline{x}_i)\leqq 0\}$ としているが、｛ ｝内をいろいろに設定することが出来るので、本手法は構造物の信頼性解析のみならずライフライン等の問題を含め多くの解析への応用に潜在的可能性を有するものである。

2．手法

図１に手法の計算手順を示す。まず、与条件の確率変数$\underline{x}$ の確率密度関数$f_{x_i}(x_i)$, $i=1,2,\cdots,n$および確率変数間の相関係数ρ_{ij}を用いて、Nataf Model[8)] により$\underline{x}$ の結合確率密度関数を作成する。重要サンプリング密度関数$h(\underline{x})$は簡単な１つのピークを有する関数形の場合に限定して本手法を示しておく。しかし、$h(\underline{x})=\Sigma w_i h_i(\underline{x})$[5)]とすることにより、より効果的な手法となる。

以上の準備を踏まえて適合型重要サンプリングを行う。その詳細な手順は次の通りである。

（ｓｔｅｐ１）$N_j(0)=0, j=1,2,\cdots,N+M+1$とする。

（ｓｔｅｐ２）ｉ次のサンプリングにより、$h(\underline{x})$に基づいて$\underline{x}_i$を抽出し、(1)式よりZ_iを求める。

（ｓｔｅｐ３）Zの確率分布関数実現値$F^*(j)_i$を以下のように作成する。

$Z^*+(K-2)\Delta < Z_i \leqq Z^*+(K-1)\Delta$ ならば、

$N_j(i)=N_j(i-1); j=1,2,\cdots,(k-1)$

$\quad =N_j(i-1)+f(x_i)/h(x_i); j=k,k+1,\cdots,N+M+1$

$F^*(j)_i=(1/i)N_j(i); j=1,2,\cdots,N+M+1$

ここで、

$N_j(i)$=i次までのサンプリングにおいて、サンプル値Zが$Z^*+(j-1)\Delta$以下の値として実現した重みつき発生総回数

（ｓｔｅｐ４）$F^*(j)_i$を一組の観測データとして、カルマンフィルタにより未知定数a_iを同定する。

観測方程式は、

$$\begin{bmatrix} F^*(1)_i \\ F^*(2)_i \\ \vdots \\ F^*(N+M+1)_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(Z^*,a_1,a_2,\cdots) \\ F(Z^*+\Delta,a_1,a_2,\cdots) \\ \vdots \\ F(Z^*+(N+M)\Delta,a_1,a_2,\cdots) \end{bmatrix}_i + \varepsilon$$

状態方程式は、

$$[a_1,a_2,\cdots]^T_i=[a_1,a_2,\cdots]^T_{i-1}$$

（ｓｔｅｐ５）構造システムの破壊確率は、

$P_f(i)=F(0,a_1,a_2,\cdots)_i$

（ｓｔｅｐ６）i=i+1として、(step2)から(step5)までをi=1から繰り返し、収束するまで実行する。

なお、下限値Z^*は負の値とし、それをN等分し、正のZの範囲の上限値は$M\Delta$とする。

３．試算例

紙面の都合上試算例２題の結果のみ図２，３に示す。

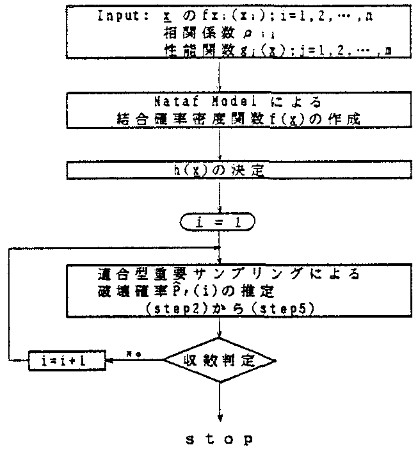
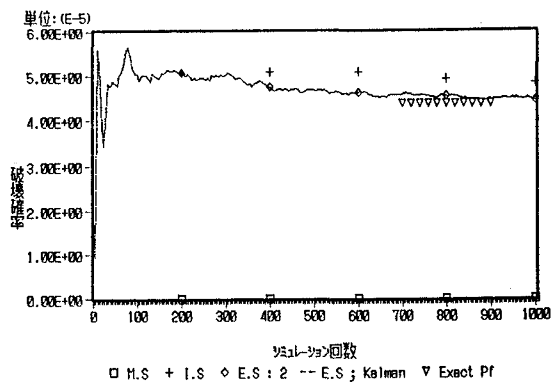
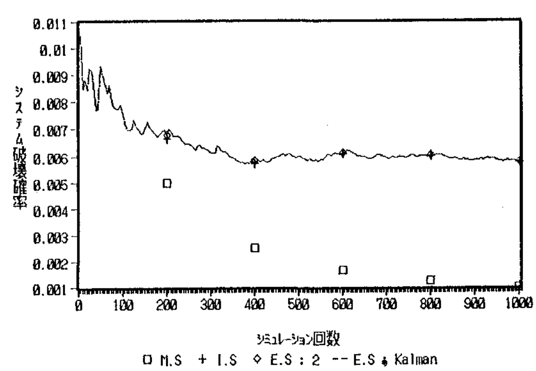


図１ Adaptive Importance Sampling Method



図−２，試算例１（性能関数：$g=X_1-X_2$）



図−３，試算例２（性能関数：$g_1=X_4X_2-X_6X_1/4$, $g_2=X_5X_3-X_1/2$）

注：本研究は、星谷が手法の誘導を、丸山がカルマンフィルタの適用を、斉藤が数値解析を分担した。

参考文献：

1) Rubinstein ,R.Y. ,Simulation and the Monte Carlo Method ,John Wiley ,1981
2) Harbitz ,A. ,proc. of ICASP3 ,1983, 3) Shinozuka ,M. ,Jour. of ST. ,ASCE ,1983
4) Schuëller ,G.I.他 ,Jour. of Struct. Safety ,1987, 5) Fu,G.他 ,proc. of 5th ASCE Specialty Conf. ,1988, 6) Ibrahim ,Y.他 ,proc. of 5th ASCE Specialty Conf. ,1988,
7) Fujita ,M. ,proc. of JSCE ,1988, 8) Liu ,P.I. ,Prob. Eng. Mech. ,1986