

I-151 等式制約法における最小化法について

群馬高専 正員 平田恭久

1. まえがき

著者は等式制約法と称する最適化手法を考案し、現在はその改良に努力を傾けている。最適化には制約条件の処理と目的関数の改善という二つの側面がある。等式制約法は制約条件の処理について、*simplex* 法に準じた *tableau* の掃出し計算で活性な制約面を求めることにより解決したが、目的関数の最小化についてはまだ改良の余地が残っている。勾配を用いる最小化法には、最急降下法、可変計量法があるが、現段階の等式制約法には簡便な最急降下法を採用している。ここでは効率化を図るため、可変計量法の考え方を等式制約法での最小化に応用できないかを検討してみた。取り上げた主要な問題点は、①活性な制約面の変化に伴う探索すべき関数の変化、②等式制約法でのリニアサーチの方法、③リニアサーチのときの制約面 ($\partial g / \partial x$) の近似、である。

2. 現段階の最小化法

等式制約法の Δx_m 掃出しに伴う *tableau* 内容が図-1であるが、掃出し後の *tableau* には活性な制約面 g_m に近づく制約変数の変化 Δx_m と探索方向を示す $\partial L / \partial x_s$ が得られている。 $\partial L / \partial x_s$ を式(1)で探索方向ベクトルに変換し、この Δx_s で Δx_s 掃出しを行うと *tableau* の g 行 Δx_m 列 $= \Delta x_m + \Delta x_{ms}$ になり、探索変数の変化 Δx_{ms} は式(2)になる。この操作を反復することにより、活性な制約面に沿って最適解に近づくことができる。

	f	g_m	g_{r-m}	Δx_m	Δx_s
g	f	$-g_m^T$	$-g_{r-m}^T$	0_m^T	0_s^T
x_m	$\frac{\partial f}{\partial x_m}$	$-\frac{\partial g_m}{\partial x_m}$	$-\frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_m}$	I_m	0
x_s	$\frac{\partial f}{\partial x_s}$	$-\frac{\partial g_m}{\partial x_s}$	$-\frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_s}$	0^T	I_s

	f	g_m	g_{r-m}	Δx_m	Δx_s
g	$f + \Delta f$	0_m^T	A	Δx_m^T	0_s^T
x_m	λ_m	I_m	B	$-(\frac{\partial g_m}{\partial x_m})^{-1}$	0
x_s	$\frac{\partial L}{\partial x_s}$	0^T	C	D	I_s

図-1 Δx_m 掃出しに伴う *tableau* 内容

$$x_{sj} = -\frac{\partial L}{\partial x_{sj}} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x_{sj}} \Big| x_{sj} \cdot \beta_j \cdots (1)$$

$$\Delta x_{ms}^T = \Delta x_s^T \left\{ -\frac{\partial g_m}{\partial x_s} \left[\frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right]^{-1} \right\} \cdots (2)$$

3. 活性な制約面の変化

等式制約法の最小化法として、可変計量法を採用したときの問題点に活性な制約面の変化がある。乗数法等では、制約条件の抵触（活性な制約面の変化に相当）により *penalty function* が変化するが、同一の関数として可変計量法を適用している。図-2に活性な制約面の変化を示すが、活性な制約面の境界で L は折れ線になり、 $\partial L / \partial x_s$ (L の探索変数について微分) は不連続である。 L の最小点は $\partial L / \partial x_s = 0$ より求められるが、微分が不連続の関数にはこの方法は使いにくい。等式制約法ではこの場合を制約面の交線を求めることで処理している。

可変計量法では微分を1階少なくするため、式(3)の *secant condition* より勾配を計算しているので、図-2に示すような凸の場合なら、 $\partial L / \partial x_s$ が不連続の場合でも近似点を求めることが可能と考えられる。式(3)の D は L についての *Hesse* 行列の近似行列であり、 $\partial L / \partial x_s = 0$ の点は式(4)より推定できる。可変計量法では少しずつ D の近似度を高めていくため、 D には過去のデータが蓄積されていることから、活性な制約面

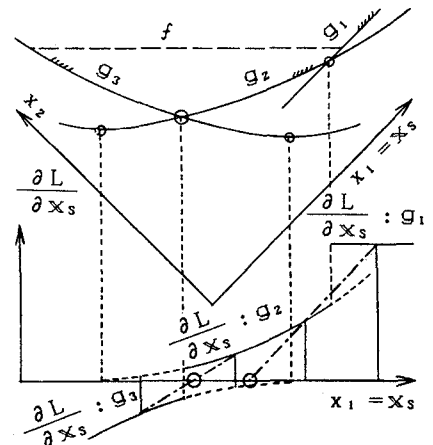


図-2 活性な制約面の変化

の変化により L が異なったものになることに對し、何らかの工夫が必要である。特に等式制約法では縮小勾配を用いているため、活性な制約面の変化に伴う探索変数と制約変数の入れ換えをどのように扱うかを決めておく必要がある。

4. リニアサーチの工夫

乗数法等と同じ形の *penalty function* は式(5)であり、等式制約法では $g_i \leq 0$ を常に確保しているの、 $P=L=f$ である。探索方向ベクトルを定めるときに $\partial f / \partial x$, $\partial g / \partial x$ を計算し、リニアサーチでは f , g のみを各点で求め、この g についての掃出し計算より得られた x で f を更新する。これにより活性な制約面に沿った探索が可能になるが、できるだけ活性な制約面に近づいた方がリニアサーチの精度が向上するので、図-3に示す修正方向を用いることにした。 Δx_s に伴う活性な制約面に近づくとする Δx_{ms} は、 $\partial f / \partial x$, $\partial g / \partial x$ を計算した点で定まるが、リニアサーチが進むにつれて g の非線形性のため、リニアサーチの経路が活性な制約面から離れていく傾向がある。この点を改善するには、 g の変化に応じて Δx_{ms} を修正すればよく、修正率 $1+r$ は式(6)になる。

5. 制約面の近似

等式制約法でのリニアサーチは1直線を進むものではないことから、得られた f , g の値を利用して $\partial f / \partial x$, $\partial g / \partial x$ の近似ができないかを考えてみた。 f の微分は一般に簡単なので、ここでは g のみを取り上げて説明する。図-4は制約面の近似の概念を示したものであり、 $\partial g / \partial x$ の近似行列 C の修正は式(7)で行う。 C の初期値は $\partial g / \partial x$ とし、その後は g の値から *secant condition* で少しずつ修正していく。修正行列 U^k の作り方は種々考えられるが、例えばBroydenの方法等を参考にする。修正された $\partial f / \partial x$, $\partial g / \partial x$ を用いて *tableau* の掃出しを行うと、変化した $\partial L / \partial x_s$ 等が得られるので、より効率の良い探索方向に修正できる。

6. まとめ

等式制約法での最小化法に可変計量法の考え方を取り入れるための考察を行い、次の結果を得た。①活性な制約面の変化については、 $\partial L / \partial x_s$ の不連続は処理可能であるが、探索変数と制約変数の入れ換えは未解決である。②リニアサーチについては、修正方向を用いることで活性な制約面に沿う精度を向上させることができる。③制約面の近似については、得られた g の値で修正した *tableau* の $\partial g / \partial x$ を掃出すことにより、リニアサーチをより効率の良い探索方向に修正できる。

$$D^{k+1}(x_s^{k+1} - x_s^k) = \frac{\partial L^{k+1}}{\partial x_s} - \frac{\partial L^k}{\partial x_s} \quad (3)$$

$$D^{k+1} \Delta x_s = \frac{\partial L^{k+1}}{\partial x_s} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} P(x, \lambda) &= f(x) + \lambda^T \langle g \rangle \\ g_i > 0 \text{ のとき } \langle g_i \rangle &= g_i \\ g_i \leq 0 \text{ のとき } \langle g_i \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$1 + r^{k+1} = 1 + \sum_{i=1}^k \pm \Delta x_{ms}^i / \Delta x_{ms} \quad (6)$$

+ は Δx_s 方向, - は逆方向

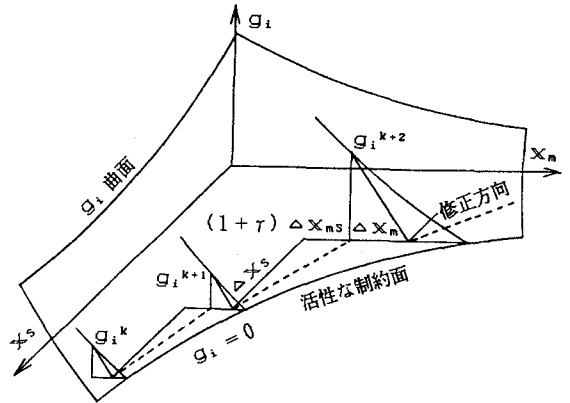


図-3 リニアサーチにおける修正方向

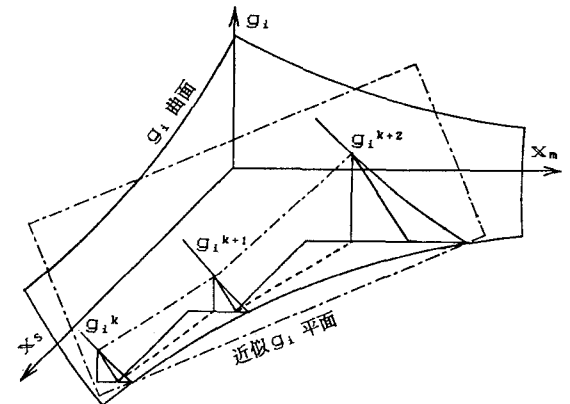


図-4 制約面 ($\partial g_i / \partial x$) の近似

$$\left. \begin{aligned} C^0 &= \partial g / \partial x \\ C^{k+1} &= C^k + U^k \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$