

## I-150

## 混合変数を用いた双対法によるトラス構造物の総合的な最適設計法

住友重機械工業(株) 正会員 ○浅井 一浩  
愛媛大学工学部 正会員 大久保 禎二

## 1. まえがき

著者らはこれまでに、トラス構造物の非線形な設計空間を、目的関数及び制約条件の一次の偏微係数の符号により原設計変数あるいはその逆数を用いて原設計問題より控えめかつ確実に凸な設計空間に近似し、双対理論により最適解を決定する方法に関する基礎的な研究を行ってきたが<sup>1)</sup>、本研究はこの方法によりトラス構造物の製作費を最小にするように各部材要素の断面寸法と使用材種、構造物の幾何形状を同時に最適化する総合的な最適設計法について考察した結果について述べるものである。

## 2. 混合変数を用いたトラス構造物の近似設計問題の設定

本研究で提案している最適設計法は、トラス構造物の設計問題の目的関数と制約条件を部材断面積 $A$ 、節点座標 $Y$ 、部材要素の使用材種 $M$ の関数として表わし、これを混合変数を用いて次のように近似する。

目的関数:  $\bar{W}(A, Y, M^0 + \Delta M)$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_i [M_i^0 + \Delta M_i] A_i + \sum_{k=1}^p [\omega_k [M^0 + \Delta M] Y_k - \omega_k [M^0 + \Delta M] (Y_k^0)^2 \frac{1}{Y_k}] + \bar{W} \quad (1)$$

制約条件:  $\bar{g}_j(A, Y, M^0 + \Delta M)$

$$= \sum_{i=1}^n [a_{ij} A_i - a_{ij} (A_i^0)^2 \frac{1}{A_i} + m_{ij} \Delta M_i] + \sum_{k=1}^p [y_{kj} Y_k - y_{kj} (Y_k^0)^2 \frac{1}{Y_k}] + \bar{U}_j \leq 0 \quad (2)$$

ここに、 $\omega_i = \partial W / \partial A_i$ ,  $\omega_k = \partial W / \partial Y_k$ ,  $a_{ij} = \partial g_j / \partial A_i$ ,  $y_{kj} = \partial g_j / \partial Y_k$

$m_{ij} = \partial g_j / \partial M_i$ ,  $\bar{W}, \bar{U}$ : 定数項,  $(+)$ : 正值,  $(-)$ : 負値

上式において、 $A, Y$ は連続変数、 $M$ は離散変数である。トラス構造物の状態変数に関する制約条件の $M$ に関する偏微係数 $m_{ij}$ は、構造解析理論より $A$ の偏微係数 $a_{ij}$ を用いて解析的に計算することができる。このことは $M$ をも設計変数として考慮する本研究の設計法において計算上の大きな利点となる。また、式(1)、(2)の近似方法により定義される近似の実行可能領域は、実際の実行可能領域より控えめな近似となるが確実に凸空間に近似することができ、双対理論により確実に解を求めることができる。

## 3. 双対設計問題の導入及び改良解の決定方法

式(1)、(2)で表わされる凸近似設計問題を双対理論により解くため、凸近似設計問題のラグランジュ関数を導入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda, A, Y, M^0 + \Delta M) = & \sum_{i=1}^n [\omega_i [M_i^0 + \Delta M_i] A_i + \sum_{j=1}^q \lambda_j (a_{ij} A_i - a_{ij} (A_i^0)^2 \frac{1}{A_i} + m_{ij} \Delta M_i)] \\ & + \sum_{k=1}^p [\omega_k [M^0 + \Delta M] Y_k - \omega_k [M^0 + \Delta M] (Y_k^0)^2 \frac{1}{Y_k} + \sum_{j=1}^q \lambda_j (y_{kj} Y_k - y_{kj} (Y_k^0)^2 \frac{1}{Y_k})] \\ & + [\bar{W} + \sum_{j=1}^q \lambda_j \bar{U}_j] \quad , \quad \lambda_j \geq 0 \quad , \quad (j=1, \dots, q) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに $\lambda_j$ は双対変数(ラグランジュ乗数)である。

上記の双対設計問題の解 $\lambda^*, A^*, Y^*, \Delta M^*$ は、ラグランジュ乗数 $\lambda$ について最大化し、 $A, Y, \Delta M$ について最小化することにより決定される。ところで、式(3)を構成する各項についてみると、右辺の第一項が $A_i$ および $\Delta M_i$ に関する項の和で表わされ、第二項が $Y_k$ および $\Delta M$ に関する項の和で表わされている。また右辺の最終項は $A, Y$ および $\Delta M$ に関しては定数項である。このことより、式(3)のラグランジュ関数 $\mathcal{L}(\lambda, A, Y, M^0 + \Delta M)$ を与えられた $\lambda$ のもとで $A, Y, \Delta M$ に関して最小化することは、式(3)の第一項の各 $i$ の $[\quad]$ の値を $A_i$ および $\Delta M_i$ に関して最小化し、第二項の各 $k$ の $[\quad]$ の値を $Y_k$ および $\Delta M$ に関して最小化することにより達成できることがわかる。

ところで、一般の構造設計問題においては $\Delta M$ および $Y$ の変化の影響が設計空間に与える影響が大きいことより、本研究ではまず各部材の材種を変化させないで、つまり $\Delta M_i = 0$  ( $i=1, \dots, n$ )として式(3)

の各 [ ] をそれぞれ  $A_i$  および  $Y_k$  について独立に最小化し  $A_i$  および  $Y_k$  を改良することとした。また式 (3) を  $\Delta M$  および  $A$  に関して最小化する。このような入,  $A, Y$  および  $M, A$  の二段階の改良を繰り返すよことにより最終的な最適解を決定することができる。

#### 4. 最適設計アルゴリズム

2. および 3. で述べた最適設計アルゴリズムをまとめると次のようになる。

- (1) 原設計問題を  $A, Y, M$  に関する一次の偏微係数を用いて凸設計問題に近似する。
- (2) 凸近似設計問題のラグランジュ関数  $L$  を導入し、 $\lambda$  についてニュートン法により最大化、 $A, Y$  について最小化する。 $\lambda$  の変化に対応する  $A, Y$  についての最小化は各部材要素毎に独立に、かつ解析的に行うことができる。
- (3)  $\lambda$  および  $Y$  を固定し、アクティブな制約条件群を変化させない条件で各部材要素毎に材種を 1 ランク上位および下位の材種に変更した場合の  $A$  の変化をも考慮した  $L$  の値の大小を比較し、 $L$  の値を減少させるように各部材要素の  $M$  および  $A$  を改良する。
- (4) (2), (3) で改良した  $A, Y, M$  を新たな初期値とし、(1), (2), (3) の Step を繰り返すことにより最適な  $A, Y, M$  を決定する。

#### 5. 最適設計例

上記の方法により応力度およびたわみの制約条件を考慮した種々の不静定トラスの最適設計を行ったが、図-1に示す31部材トラスのたわみ制限  $\delta_a = 10\text{cm}$  の場合の改良過程を図-2および表-2に示す。使用材種は表-1の材種群から選択している。また形状変数  $Y$  としては下弦材節点の高さを考慮し、 $Y$  の Move Limit として 5% を考慮している。 $A, M, Y$  の最適解への収束状況はきわめて良好であり、8回の改良でほぼ最適解の近傍に収束した後、20回の改良で最終的な最適解を得た。最適解において不要な構造要素の断面寸法は確実に 0 に収束し、本研究の方法により各部材要素の断面寸法のみならず、最適な部材配置をも同時に決定することができる。また、最適解の近傍でたわみの制約条件がアクティブとなる場合には、2組の  $A, M, Y$  の組み合わせが最適解のまわりで振動する。このような場合には2組の  $Y$  を固定し、それぞれの  $Y$  について 2. ~ 3. で述べた方法

表-1 使用可能材種群

| 材種番号 | 許容応力度<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | 弾性係数<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $\rho$<br>(1/cm <sup>3</sup> ) |
|------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1    | 140                            | $0.4 \times 10^6$             | 0.75                           |
| 2    | 200                            | 0.5                           | 1.00                           |
| 3    | 400                            | 0.7                           | 1.45                           |
| 4    | 850                            | 1.1                           | 2.50                           |
| 5    | 1300                           | 1.4                           | 3.20                           |
| 6    | 1700                           | 1.7                           | 4.00                           |
| 7    | 2400                           | 2.1                           | 5.10                           |

$\rho$ : 部材の単位容積当りの相対的な製作費

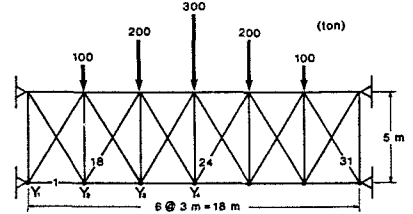


図-1 31部材トラス  
(初期材種は全て 1)

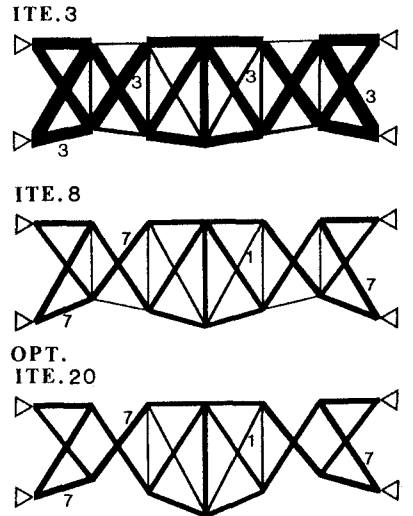


図-2 改良過程 ( $\delta = 10\text{ cm}$ )

表-2 31部材トラスの改良過程および最適解

| ITE.*    | CROSS-SECTIONAL AREA (cm <sup>2</sup> ) |                      |                      |                      |  | COORDINATES (cm) |       |       |       | TOTAL COST |
|----------|-----------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--|------------------|-------|-------|-------|------------|
|          | A1 (M) <sup>†</sup>                     | A18 (M) <sup>†</sup> | A24 (M) <sup>†</sup> | A31 (M) <sup>†</sup> |  | Y1               | Y2    | Y3    | Y4    |            |
| INIT.**  | 100.0 (1)                               | 100.0 (1)            | 100.0 (1)            | 100.0 (1)            |  | 0.0              | 0.0   | 0.0   | 0.0   | 1057286.   |
| 1        | 1734.7 (1)                              | 1919.9 (1)           | 672.8 (1)            | 2162.0 (1)           |  | -17.5            | 1.0   | -25.0 | -25.0 | 13958940.  |
| 3        | 576.2 (3)                               | 634.5 (3)            | 16.7 (3)             | 723.0 (3)            |  | -16.2            | 49.6  | 8.5   | -37.6 | 6310713.   |
| 8        | 106.3 (7)                               | 106.4 (7)            | 8.9 (1)              | 129.7 (7)            |  | -14.8            | 105.8 | 41.2  | -44.9 | 3646468.   |
| 20(OPT.) | 112.7 (7)                               | 107.7 (7)            | 2.8 (1)              | 122.7 (7)            |  | 30.2             | 126.0 | 52.80 | -70.5 | 3541379.   |

ITE.\*: ITERATION NUMBER, M<sup>†</sup>: MATERIAL NUMBER, INIT\*\*.: INITIAL VALUES  
OPT\*\*.: OPTIMUM SOLUTION, S<sub>AE</sub>: SET OF THE ACTIVE CONSTRAINTS

参考文献[1]たとえば、S.Ohkubo et.al.: Total Optimization of Truss Considering Shape, Material and Sizing Variables, Structures Congress, 1989. [2]C.Fleury and V.Braibant: Structural Optimization - A New Dual Methods Using Mixed Variables, Int.J.Num.Meth.Engng, Vol.23, 1986.