

I-112 周辺固定の横等方性円環厚板の軸対称曲げ

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. まえがき 長い間、攻勢を極めた厚板の曲げ理論も、最近は余り見受けられなくなり、等方性厚板の曲げに関しては、一応、峠を越えた感がある。これからの厚板理論は、異方性厚板に向うものと考えられるが、現時点でも、幾つかの研究が見受けられる。異方性厚板の場合には、座標系が異なるだけで、難度が著しく異なり、現在でも、横等方性及び円柱異方性（極異方性）円環或いは扇形厚板などは、解析されていない様である。

著者は、先に、異方性体の中でも弾性解が比較的容易に得られる横等方性体の3次元弾性解として、一般化されたElliottの解を求めた。本報告は、一般化されたElliottの解を特殊解として用い、横等方性円環厚板の平面応力解・一般化平面応力解を同次解として用いたLove理論により、周辺固定の横等方性円環厚板の軸対称曲げを解析するものである。

2. 特殊解及び同次解 Love理論によれば、板の上、下面における荷重条件を満たすために、特殊解が必要になる。この特殊解として、一般化されたElliottの解を用いる。横等方性円環厚板の座標系を図-1に示した様に取り、円柱座標 (r, θ, z) における変位成分を u_r 及び u_z で表す。解の表現については、すでに報告しているので省略し、解に含まれるポテンシャル関数を示せば、次のとおりである。

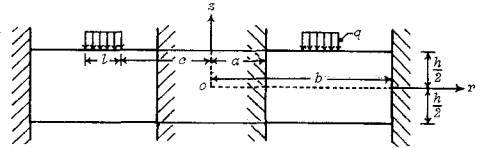


図-1 周辺固定の横等方性円環厚板

$$\phi_{03} = \sum_{s=1}^{\infty} \left[J_0(\alpha_s r) (A_s^{(1)} \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_2}} + L_s^{(1)} \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_2}}) + Y_0(\alpha_s r) (A_s^{(2)} \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_2}} + L_s^{(2)} \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_2}}) \right] \quad (1.a)$$

$$\phi_3 = \sum_{s=1}^{\infty} \left[J_0(\alpha_s r) (C_s^{(1)} \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}} + M_s^{(1)} \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}}) + Y_0(\alpha_s r) (C_s^{(2)} \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}} + M_s^{(2)} \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}}) \right] \quad (1.b)$$

$$\phi_{01} = \phi_1 = 0 \quad (1.c)$$

ここで、 $A_s^{(1)}, \dots, M_s^{(2)}$ は、荷重条件によって定められる未定定数であり、助変数 α_s は、 $\alpha_s = \lambda_s/a$ である。

特殊解のみでは、板の周辺の境界条件を満足できないので、同次解が必要になる。その同次解として、横等方性円環厚板の平面応力解・一般化平面応力解を用いると、それらの解は、次の様に表される。

$$u_r^{(0,1)} = \frac{D_0}{r} + E_0(\nu_1 \tau_6 - 1)r, \quad u_z^{(0,1)} = -2E_0 k_1 \tau_6 z \quad (2.a, b)$$

$$u_r^{(0,2)} = -z \left\{ \frac{A_0^{(2)}}{r} - C_0^{(1)} r (\nu_2 \tau_7 - 1) - C_0^{(2)} [r(2 \log r - 1)(\nu_2 \tau_7 - 1) - \frac{2z^2}{3r} (\tau_7 - \nu_4)] \right\} \quad (3.a)$$

$$u_z^{(0,2)} = A_0^{(1)} + A_0^{(2)} \log r + \frac{k_2}{2} C_0^{(1)} \{ r^2 (\nu_2 \tau_7 - 1 + \nu_1 \nu_4) + \frac{h^2}{2k_2} [\tau_7 (1 + k_2) - \nu_4] - 2\tau_7 z^2 \} \\ + k_2 C_0^{(2)} \{ r^2 (\log r - 1)(\nu_2 \tau_7 - 1 + \nu_1 \nu_4) + \log r [\frac{h^2}{2k_2} \{ \tau_7 (1 + k_2) - \nu_4 \} - 2\tau_7 z^2] \} \quad (3.b)$$

ここで、

$$\tau_6 = \frac{c_{13}}{c_{13} \nu_1 - c_{33} k_1}, \quad \tau_7 = \frac{c_{13}}{c_{13} \nu_2 - c_{33} k_2}, \quad \nu_4 = \frac{c_{11}}{c_{44}} \quad (4.a \sim c)$$

また、 h は板厚、 $D_0, \dots, C_0^{(2)}$ は、境界条件によって定められる未定定数である。

3. 荷重条件及び境界条件 板の上面に、同心円状に分布する帯状荷重を受け、下面が自由の円環厚板を考えると、荷重条件は、次式となる。

$$z = h/2 \text{ において, } \sigma_{zr} = 0, \sigma_{zz} = -p(r) \quad (5.a, b)$$

$$z = -h/2 \text{ において, } \sigma_{zr} = 0, \sigma_{zz} = 0 \quad (6.a, b)$$

ここで、 $p(r)$ は、 $c < r < c+1$ において q 、その他において0と定義された荷重関数である。

板の内、外周辺を固定とすると、境界条件は、次式となる。

$$r = a \text{ 及び } r = b \text{ において, } (u_r)_{z=0} = 0, (u_z)_{z=0} = 0,$$

$$(\partial u_r / \partial z)_{z=0} = 0 \quad (7.a \sim c)$$

4. 計算結果 円環厚板の外半径 b と内半径 a との比 b/a が6.0、載荷領域 $c/a = 3.0$ 及び $1/a = 1.0$ の横等方性円環厚

Table 1. Elastic constants c_{ij}
(in units of 10GPa)

c_{ij}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}
Graphite-epoxy	0.82	0.26	0.32	8.68	0.41
E glass-epoxy	1.51	0.61	0.52	4.68	0.47
Isotropy	3.5	1.5	1.5	3.5	1.0

板が種々の板厚比 $e = h/(b-a)$ を持つ場合について計算した。横等方性材料としては、E glass-epoxy及びGraphite-epoxyを取扱い、ポアソン比 $\nu = 0.3$ の等方性材料も取扱った。これらの材料の弾性定数の値は表-1に示した。計算結果の一部を図-2から図-5に示した。

5. あとがき 円環厚板の平面応力解・一般化平面応力解は、軸対称問題の場合には、誘導がやや煩雑であるが、本研究では、一般化された Elliottの解より求めた。本研究で解析した周辺

固定の横等方性円環厚板の解析結果は、図-4 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 ($r=a$) 図-5 σ_{zr} の分布 ($r=a$) 板厚比 e が1/8以下になると、ほぼ薄板 (Graphite-epoxy)

理論による解析結果に近くなっている。板厚比の決め方にもよるが、円環厚板の場合は、円形厚板の場合より、板厚比の効果が早く現れるのが一つの特徴と思われる。今後は、Love理論の改良理論により、横等方性円形或いは円環厚板の非軸対称曲げを解析してみたい。

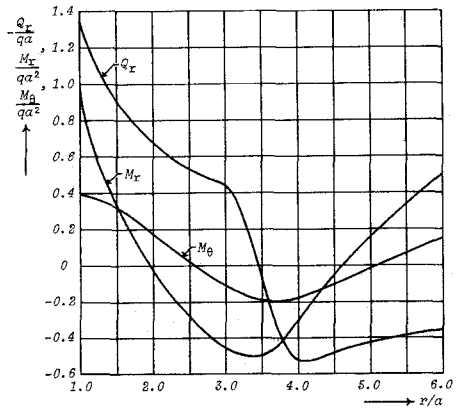


図-2 断面力の分布
(Graphite-epoxy, $e=1/4$)

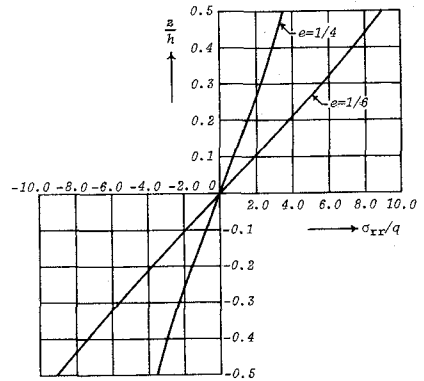


図-3 σ_{rr} の分布 ($r=a$)
(Graphite-epoxy)

