Ⅰ-109　液体に接する片持円筒殻の固有周期略算式

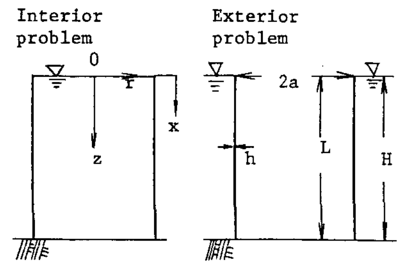
北海道大学　正員　三上　隆
北海道大学　正員　芳村　仁

1．まえがき

液体に接する円筒殻の動的挙動の解明は，石油タンク，海洋構造物などで重要な問題であり，固有振動数の決定は，構造物の耐震設計をする上での第一ステップである。固有振動数は，通常，離散モデルの固有値解析によって算定されるが，概略の耐震性を検討する段階では，簡単でしかもある程度の精度で振動数を推定できれば実用上十分である。そのため基本固有振動数を推定する略算式が二，三提案されているが，いずれも内部問題に対するものであり，殻諸元パラメータも使用上十分な範囲にわたって用意されていないようである。本研究では，内部または外部問題として表される片持形式の円筒殻を対象として，広範囲の殻諸元に対して適用でき，しかも実用上十分な精度で基本固有周期を算定できる略算式を提案する。なお略算式は，液体－円筒殻系を殻の剛性と殻の質量から成る系，殻の剛性と液体の質量から成る系の複合系ととらえ，各系の基本固有周期を合成して求めるDunkerleyの方法[1]により求めた。

2．解析モデルと基礎方程式

図－1に示す液体高さHと殻の高さLが等しく，一様な厚さhの片持形式の円筒殻を考える。E，ν，ρ_s，aを殻の弾性係数，ポアソン比，密度，半径，ρ_lを液体の密度とする。液体は非圧縮，非粘性で渦無し流れとし，殻の運動は，せん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論に従うものとする。さて、液体に接する円筒殻の基礎方程式[2]は、流体との連成の影響を表す圧力による項が殻の運動方程式中に取り入れられ，次のように表される。



図－1　解析モデル

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega^2\left([F]\{X\}+\{P\}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここに$(\ )'=d(\ )/d\xi$，ξ（$=[0,1]$）は殻の経線方向の無次元化座標系，$\{X\}^T=(u,v,w,\beta_x,\beta_\theta)$は変位ベクトル，[C]～[F]は殻の諸元で表される行列，$\Omega^2=\rho_s(1-\nu^2)a^2\omega^2/E$は液体－円筒殻系の固有振動数パラメータ，$\{P\}^T=(0,0,p_w,0,0)$は流体と円筒殻の相互作用により発生する外圧力ベクトルである。

3．固有周期略算式の誘導

液体－円筒殻系を既に述べたように独立な二つの系に分けて考えれば，各系の基礎方程式は式(1)より次のように表される。

殻の剛性と殻の質量よりなる系（空の円筒殻）

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega_s^2[F]\{X\} \qquad \cdots(2)$$

$$\Omega_s^2=\rho_s(1-\nu^2)a^2\omega_s^2/E \qquad \cdots\cdots(3)$$

殻の剛性と液体の質量よりなる系

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega_l^2\{p^*\} \qquad \cdots(4)$$

$$\Omega_l^2=\rho_l(1-\nu^2)a^3\omega_l^2/(Eh) \qquad \cdots(5)$$

$$\{p^*\}=(0,0,q,0,0) \qquad \cdots(6)$$

ここにΩ_sとΩ_lは各系の無次元化固有振動数パラメータ，ω_sとω_lは各系の固有振動数である。

式(2)，(4)の解（選点法[2]を適用）が求まれば，液体－円筒殻系の固有周期$T(=2\pi/\omega)$は，各系の固有周期$T_s(=2\pi/\omega_s)$，$T_l(=2\pi/\omega_l)$より$T=\sqrt{T_s^2+T_l^2}$の関係式を用いて求められる。

ここでポアソン比$\nu=0.3$，および$0.0005\leqq h/a\leqq 0.01$，$1\leqq L/a\leqq 8$の適用範囲に対する基本固有周期略算式を示せば次のようになる。

$$T=2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}\ \sqrt{F^2+(\rho_l/\rho_s)(a/h)G^2} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ただし，Fは空の円筒殻から得られるL/aの関数式，同様に，Gは殻の剛性と液体の質量から成る系の関数式で，内部・外部問題に対して次のように与えられる。

$$F=0.6301+0.8174(L/a)+0.2868(L/a)^2+0.5738\times10^{-2}(L/a)^3 \quad \cdots\cdots(8)$$

$$G=0.3413+0.5131(L/a)+0.1197(L/a)^2+0.1602\times10^{-1}(L/a)^3-0.6161\times10^{-3}(L/a)^4$$

［内部問題に対して］ ....(9.a)

$$G=0.2432+0.4747(L/a)+0.9966\times10^{-1}(L/a)^2+0.1544\times10^{-1}(L/a)^3-0.5266\times10^{-3}(L/a)^4$$

［外部問題に対して］ ....(9.b)

4．数値計算例

1）内部問題の場合　　Haroun[3]らによるF.E.M.の結果と比較する。解析諸元は次のようなものである。

Shell(A)；　$L=H$, $L/a=3$, $h/a=1.489\times10^{-3}$, $a=7.32$m

Shell(B)；　$L=H$, $L/a=0.67$, $h/a=1.388\times10^{-3}$, $a=18.3$m

ただし，$E=2.1\times10^6$kg／cm²，$\rho_s=8.00\times10^{-6}$kg・sec²／cm⁴，$\rho_l=1.02\times10^{-6}$kg・sec²／cm⁴

表－1に，F.E.M.[3]，C.M.（選点法）[2]および他の略算式による基本固有周期(sec)を示す。表には，本略算式の適用範囲外［shell(B)］のケースも含んでいるが，本略算式の結果は既往の結果によく一致している。

表－1　　内部問題の周期T(sec)　［Harounモデル］

モデル	F.E.M.	C.M.	本略算式(7)	坂井らの略算式(4)	清水らの略算式(5)
Shell(A)	0.2810	0.2821	0.2824	0.2849	0.2820
Shell(B)	0.1617	0.1619	0.1621	0.1521	0.1626

2）外部問題の場合　　$\rho_l/\rho_s=0.1275$のときの結果を表－2に示す。外部問題に対しては，他の略算式が存在しないので，表は選点法[2]による値（厳密解と便宜上呼ぶ）と本略算式の値を示す。明らかに両者はよい一致を示している。

表－2　　外部問題の$T/2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}$

L／a	解　法	h／a=0.005	h／a=0.01
1	厳密解	4.5481	3.3857
	本略算式	4.5497	3.4444
4	厳密解	24.7695	18.5681
	本略算式	24.8121	18.6288
7	厳密解	66.8631	49.8381
	本略算式	66.8792	49.8668

5．まとめ

液体に接する円筒殻の固有周期略算式(7)を提案した。略算式は，液位比$H/L=1$, $0.0005\leqq h/a\leqq0.01$, $1\leqq L/a\leqq8$とするbeam typeの振動様式の内部・外部問題に適用でき（空の円筒殻にも適用できる），その精度は実用上十分なものである。

<参考文献>

1）酒井忠明；　構造力学，p.389，技報堂，1970.
2）三上　隆・芳村　仁；　液体に接する円筒殻の自由振動，構造工学論文集，Vol.34A，pp.785-796，1988.
3）Haroun, M.A. and Housner, G.W.; Complications in free vibration analysis of tanks, Proc. ASCE, Vol.108, No.EM2, pp.801-818, 1982.
4）土木学会編；　土木技術者のための振動便覧，p.417，1985.
5）清水信行他；　円筒タンクの耐震設計法に関する研究（第2報），日本機械学会論文集（C編），48巻427号，pp.328-348，1982.