

I-105 面内回転剛性を有する4節点 膜要素に関する考察

東京電機大学 正 井浦雅司

1. はじめに

有限要素法による立体構造物の解析には、膜要素と曲げ要素との組み合わせが用いられることが多く、これら量要素に関する研究は膨大な数に達しているものの、現在でも更に精度の良い要素の開発が進められている。膜要素に置ける面内回転剛性の取り扱いについても古くから研究されているが、未だ確立されているとは言いがたい。有限要素法の参考書として多く引用される文献(1)では、仮想回転剛性の考え方が説明されているが、これは物理的に明確でないばかりか、数値的にも面内回転角を正確に表わすことはできない。吉田、雨宮、増田(2)、Robinson(3)らは、応力法により面内回転剛性を有する膜要素を導いており、一方、Allmann(4)は変位関数に工夫を凝らし、変位法により面内回転剛性を有する膜要素を導いている。これらの研究に共通していることは、せん断応力の対称性を予め仮定している点である。すなわち、分布外力モーメントの存在は無いものと仮定している。Reissner(5)、Naghdi(6)らは対称なせん断応力と非対称なせん断応力を用いて変分原理の誘導を試みている。本報告は後者の流れに沿うものであり、せん断応力の対称性を仮定し無い理論から出発し、面内回転剛性を有する膜要素の開発について考察するものである。

2. 定式化

先ず、図1に示す微小矩形断面を考える。作用する外力としては、分布外力 p_x , p_y と分布モーメント m とを考える。応力としては T_{xx} , T_{yy} , T_{xy} , T_{yx} が生じるものと仮定する。力学的境界 S_f 上では、分布外力 p_n , p_v が作用しているものとし、モーメント m は存在しないものとする。 S_f 上でモーメント m の存在を仮定した時には、力学的境界条件を有意なものとする為にモーメント応力を導入しなければならない。Herrman(7)は、モーメント応力を導入することにより面内回転剛性を含む膜要素を開発しているが、モーメント応力と面内回転を含む構成方程式の定数決定に問題が残されている。平衡方程式は図1の記号を参考にし、

$$\begin{aligned} \partial T_{xx} / \partial X + \partial T_{yx} / \partial Y + P_x &= 0, \quad \partial T_{yy} / \partial Y + \partial T_{xy} / \partial X + P_y = 0, \quad T_{xy} - T_{yx} + m = 0 \quad (1.a-c) \\ \text{と求まる。力学境界条件は、} N_n &= T_{xx} \cos(n_x) + T_{xy} \cos(n_y) \quad N_v = T_{yy} \cos(n_y) + T_{yx} \cos(n_x) \quad \text{とおくと} \\ N_n &= \bar{P}_n, \quad N_v = \bar{P}_v \quad (2.a, b) \end{aligned}$$

となる。ここで、系が x , y 方向に δu , δv , z 軸周りに $\delta \theta$ だけ変化したとすると、

$$-\int \{ (\partial T_{xx} / \partial X + \partial T_{yx} / \partial Y + P_x) \delta u + (\partial T_{yy} / \partial Y + \partial T_{xy} / \partial X + P_y) \delta v + (T_{xy} - T_{yx} + m) \delta \theta \} dV + \int \{ (N_n - \bar{P}_n) \delta u + (N_v - \bar{P}_v) \delta v \} dS = 0 \quad (3)$$

と求まる。部分積分を施すことにより、上式は以下のように書き直すことができる。

$$\int \{ T_{xx} \delta \epsilon_{xx} + T_{yy} \delta \epsilon_{yy} + T_{xy} \delta \epsilon_{xy} + T_{yx} \delta \epsilon_{yx} \} dV - \int \{ p_x \delta u + p_y \delta v + m \delta \theta \} dV - \int_{S_f} \{ \bar{P}_n \delta u + \bar{P}_v \delta v \} dS = 0 \quad (4)$$

ここに、

$$\epsilon_{xx} = \partial u / \partial X, \quad \epsilon_{yy} = \partial v / \partial Y, \quad \epsilon_{xy} = \partial v / \partial X - \theta, \quad \epsilon_{yx} = \partial u / \partial Y + \theta \quad (5.a-d)$$

である。次に、構成方程式として以下の関係を仮定する。

$$\begin{aligned} T_{xx} &= E (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) / (1 - \nu^2), \quad T_{yy} = E (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) / (1 - \nu^2), \\ T_{xy} &= 2 G \epsilon_{xy}, \quad T_{yx} = 2 G \epsilon_{yx} \quad (6.a-d) \end{aligned}$$

式(6)を式(4)に代入することにより、式(4)は以下の変分原理と等価になる。

$$\begin{aligned} \delta U = 0, \quad U &= \int \{ E (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + 2 \nu \epsilon_{xy} \epsilon_{yx}) / (1 - \nu^2) + G \epsilon_{xy}^2 + G \epsilon_{yx}^2 \} dV - \\ &\int \{ p_x u + p_y v + m \theta \} dV - \int_{S_f} \{ \bar{P}_n u + \bar{P}_v v \} dS \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、分布モーメント m が作用しない時には、式(7)のEuler方程式として $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ が得られ、これより $\theta = (\partial v / \partial X - \partial u / \partial Y) / 2$ が得られる。

3. 有限要素モデル

ここでは、式(7)に基づいて、4節点を有するisoparametric膜要素を導く。その誘導過程は通常の有限要素法と同様であり、詳細は要略する。得られる剛性マトリックスを厳密に積分すると、剛なモデルが得られることはこれまでのモデルと同様であり、ここでは、文献(8)に提案されている以下の方法により剛性マトリックスを誘導する。先ず、各要素における剛性マトリックスを K とする時、これを $(m \times m)$ 点積分したものを $K_{(m, m)}$ と書けば、定数 α を用いて

$$K^* = \alpha K_{(1,1)} + (1-\alpha) K_{(2,2)} \quad (8)$$

と表わされる K^* を新たな剛性マトリックスとして用いる。ここで、 K^* の零個有値の数は3個であり、kainematic mode は生じないことが分かる。なお、ここでは $\alpha = 0.45$ を用いて以下の計算を行なっている。

4. 計算例

一様引っ張りにおいて回転角が生じないことを確認するために図2の例題を考える。モデル中央点の u , v , θ を拘束して解いた結果、変位は10桁まで厳密解と一致し、回転角は全て 10^{-17} のオーダーであった。次に、図3に示すような梁の曲げ問題を考える。表1より、本モデルは良好な結果を与えることが分かる。図4は放物線荷重を受ける板の問題であり、その結果を表2に示す。ここでも本モデルは良好な結果を与えることが分かる。図5は梁にモーメント荷重を作用させた場合であり、その結果を表3に示す。図5(b)に示す荷重形態は立体構造物ではよく見られ、本報告の主な目的もこの様な荷重を受ける構造物を精確に解析できるモデルの開発であった。数値結果より、本膜要素は立体構造物の解析に適していることが確認できた。

5. 参考文献

(1) O.C.Zienkiewicz: The Finite Element Method, McGraw-Hill. (2) 吉田、雨宮、増田：土木学会論文報告集、211号、1973. (3) J.Robinson and P.Ward: Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.15, 1980. (4) D.J. Allman: Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 26, 1988. (5) E.Reissner: Int. J. Solids Struct., Vol.1, 1965. (6) P.M.Naghd: J. Appl. Mech., Vol.31, 1964. (7) L.R.Herrmann: Hybrid and Mixed Finite Element Methods, S.N.Atluri et. al. ed., Wiley. (8) K.T.Kavanagh and S.W.Key: Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.4, 1972.

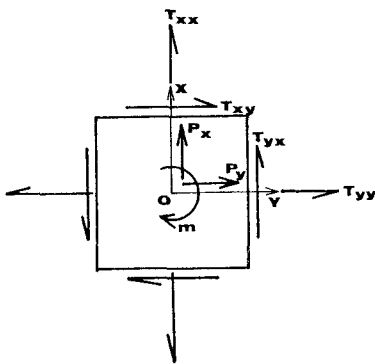


Fig. 1

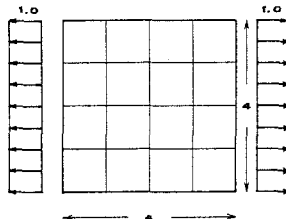


Fig. 2

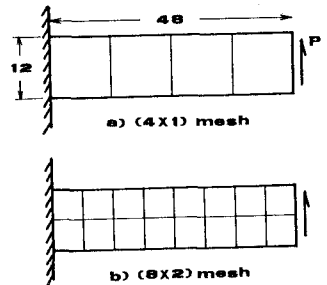


Fig. 3

Table 1

Mesh	a)	b)
Exact	100.00	100.00
Allman	73.24	90.89
Present	94.41	99.73

Table 2

	u_B	u_C	v_C	v_D
Exact	100.00	100.00	100.00	100.00
Allman	93.91	-6.45	136.46	96.97
Olsen	75.74	112.80	95.15	85.30
Present	102.55	85.88	103.72	100.36

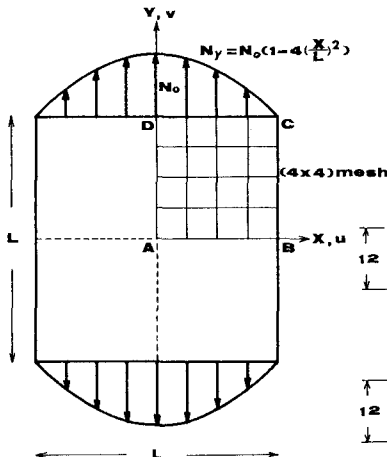


Fig. 4

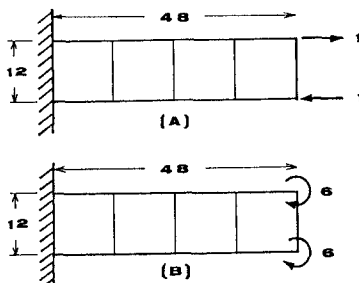


Fig. 5

Table 3

	Tip Displ.	Tip Rot. θ
Beam Theory	100.00	100.00
Case A)	97.09	92.78
Case B)	97.81	100.50