

I-100

はりの弾塑性たわみに及ぼすせん断変形の影響

秋田高専 正員 ○ 堀江 保
秋田大学 正員 薄木 征三

1. はじめに

はりの弾塑性状態まで含めた荷重-たわみ関係を仮想仕事の原理より求めた。弾塑性状態の直応力として塑性部分は一定応力、弾性部分にはせん断変形を考慮した弾性解を適用し、弾塑性たわみに及ぼすせん断変形の影響を検討した。本報告では、桁形式として単純はり、断面形として矩形断面を選び、その手順を説明する。

2. 理論式

たわみを求めたい位置に $P=1$ の単位荷重を作用させた時、仮想仕事の原理よりたわみ v は次式で求められる。

$$1 \times v = \int \bar{\sigma} \varepsilon dV + \int \bar{\tau} \gamma dV \quad (1)$$

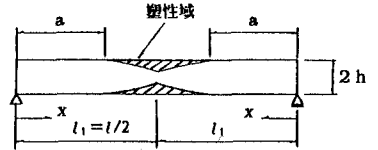


図-1 はりの塑性域分布

ここで、 ε 、 γ は実荷重による直ひずみ及びせん断ひずみ、 $\bar{\sigma}$ 、 $\bar{\tau}$ は仮想単位荷重 $P=1$ による直応力及びせん断応力を表す。(1)式の第2項がせん断の影響を表す項であるが、本報告では、第1項の直応力、直ひずみもせん断変形の影響を考慮したものをを用いた。

図-1の単純はりの桁中央のたわみ v は、弾塑性境界位置を a として、(1)式より次式となる。

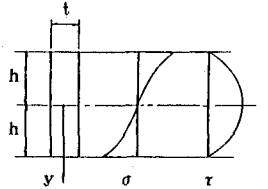


図-2 弾性応力

$$v = \int_0^a \int \bar{\sigma} \varepsilon dF dx + \int_a^{l_1} \int \bar{\sigma} \varepsilon dF dx + \int_0^a \int \bar{\tau} \gamma dF dx + \int_a^{l_1} \int \bar{\tau} \gamma dF dx \quad (2)$$

すなわち、第1項、3項が弾性区間、第2、4項が弾塑性区間に対する項を表している。(2)式において、弾性区間の応力として次式を用い、また、ひずみはこれらの応力より $\varepsilon = \sigma/E$ 、 $\gamma = \tau/G$ として求めた。

$$\sigma = \sigma_B \left\{ 1 + \frac{v_s''}{v_B''} \left(1 + \frac{I}{y D_{yy}} B_y \right) \right\} \quad \tau = \frac{Q}{t D_y} S_y \quad (3) \text{ a, b}$$

ここで、 I 、 D_y 、 D_{yy} 、 S_y 、 B_y は y に関する断面量および座標で次式のように定義され、図-2に示す高さ $2h$ 、幅 t の矩形断面に対し次のようになる。

$$I = \int_F y^2 dF = \frac{2}{3} t h^3, \quad D_y = \int_F \frac{S_y}{t} dF = -\frac{2}{3} t h^3, \quad D_{yy} = \int_F \left(\frac{S_y}{t} \right)^2 dF = \frac{4}{15} t h^5$$

$$S_y = \int_{y_1}^y y t \cdot dy = \frac{t}{2} (y^2 - h^2), \quad B_y = \int_0^y \frac{S_y}{t} dy = \frac{1}{6} (y^3 - 3h^2 y) \quad (4) \text{ a-d}$$

(3)式の σ_B は、はり理論による曲げ応力度を表し、これは直線分布となるが式(4)の B_y より応力分布は y に関する3次式となる。これらの直応力 σ 、せん断応力 τ の分布は図-2のようになる。 v_s''/v_B'' は、せん断および曲げによる曲率の比を表し、各荷重状態に対したわみ解より求められるが、ここで対象とした矩形断面に対して結果のみ示すと次式のようになる(引用文献参照)。

$$\text{分布荷重} \quad -\frac{v_s''}{v_B''} = \frac{4E}{5G} \left(\frac{2h}{l} \right)^2 \frac{l_1}{x} \frac{1}{2-x/l_1} \left\{ 1 - \frac{\cosh kl_1 (1-x/l_1)}{\cosh kl_1} \right\} \quad (5) \text{ a}$$

$$\text{集中荷重} - \frac{v_s''}{v_b''} = \sqrt{\frac{168E}{5G}} \frac{2h}{l} \frac{l_1}{x} \frac{\sinh kx}{\cosh kl_1}, \quad kl_1 = \sqrt{\frac{210G}{E}} \frac{l}{2h} \quad (5)$$

また、(2)式の弾塑性区間に対しては、図-3に示すように、弾性部分に対して(3)式の弾性解を適用し、塑性部分では、直応力が降伏応力 σ_y 、せん断応力がゼロとした。図中の記号 c は、断面内の弾塑性境界位置を表す。この区間におけるひずみは、弾性部応力を弾性係数で割ったものを用いた。

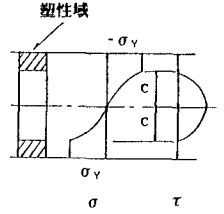


図-3 弾塑性応力

(2)式の各区間の応力をまとめて示すと次式となる。

弾性区間 ($0 \leq x \leq a$)

$$\sigma = \sigma_b \left\{ 1 + A_1 \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right) \right\} \quad \tau = \frac{3Q}{4th} \left(\frac{y^2}{h^2} - 1 \right) \quad (6) \quad a, b$$

弾塑性区間 ($a \leq x \leq l_1$)

$$\text{弾性部} \quad \sigma = \frac{\sigma_y}{c} y + \sigma_b A_1 \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{c^2}{h^2} \right) \quad \tau = \frac{3Q}{4th} \left(\frac{h}{c} \right)^3 \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{c^2}{h^2} \right)$$

$$\text{塑性部} \quad \sigma = \pm \sigma_y \quad \tau = 0 \quad (7) \quad a-d$$

ここで、 $A_1 = 5/12 \cdot v_s''/v_b''$ であり、各荷重状態に対するせん断変形の影響を表す。すなわち、 $A_1 = 0$ と置くとはり理論となる。(6)式、(7)式を用いると、(2)式のたわみ v は次式となる。

$$v = 2 \int_0^a \frac{\overline{MM}}{EI} dx + 2 \int_a^{l_1} \frac{\overline{M}\sigma_y}{Ec} dx + 2 \int_0^{l_1} \frac{12\overline{MM}}{175EI} A_1^2 dx + 2 \int_a^{l_1} \frac{\overline{MM}}{EI} A_1 \left(\frac{3}{5} - \frac{c^2}{h^2} \right) dx \\ + 2 \int_0^a \frac{6\overline{Q}Q}{5GF} dx + 2 \int_a^{l_1} \frac{6\overline{Q}Q}{5GF} \left(\frac{c}{h} \right)^2 dx \quad (F = 2th: \text{断面積}) \quad (8)$$

(8)式において、第1項～4項までが、直応力の項すなわち(1)式の第1項、第5、6項が(1)式の第2項を表す。本式は、弾性および弾塑性状態のたわみ解を合わせて表示したもので、式において、 $a = l_1$ と置いたとき弾性解を表す。また、直応力に対するせん断変形の影響は、 A_1 で表されるので、曲げたわみは、 $A_1 = 0$ と置き、(8)式の第1項、2項で求められる。

各荷重状態の曲げモーメント M 、せん断力 Q および弾塑性境界位置 c を(8)式に代入すると、これらのたわみが計算できる。その際、 c の部材軸方向 x に関する分布は、応力 σ を曲げモーメントの定義式に代入して求められる。

3. 計算例

1例として、単純ばり中央に集中荷重が作用した場合の荷重-たわみ関係を図-4に示す。図において、 M_y 、 v_y は、はり理論による降伏モーメントおよびその時の曲げたわみを表し、縦軸、横軸は、各々で正規化したものを用いた。また、 M_0 は、桁中央が全断面降伏した時のモーメントである。分布荷重の場合および矩形断面以外の断面に対する計算例は、講演時発表の予定である。

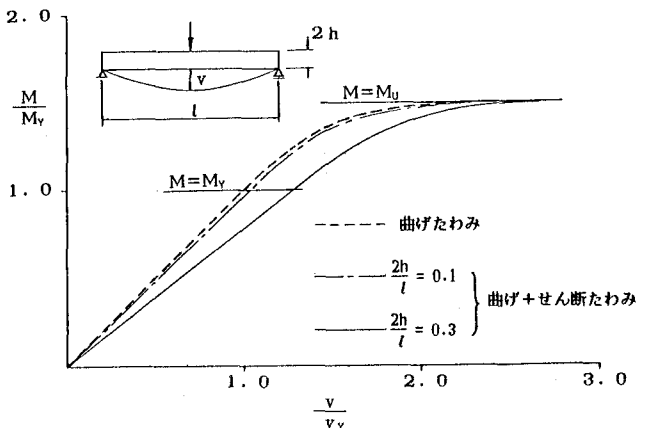


図-4 荷重-たわみ関係

引用文献：土木学会第39回年次講演会概要集第I部門p. 353, 1984年