

I-99

コンプリメンタリーエネルギー最小化による剛節骨組構造の材料非線形解析法

愛媛大学工学部 正会員 ○大久保 禎二

観音寺市役所 正会員 牧 野 耕 司

1. まえがき

構造物の非線形解析法に関して、大久保らはこれまでにエネルギー原理および数値計画法を用いて部材が軸力を受けるトラス構造物、曲げモーメントを受けるはり構造物の材料非線形解析を行う方法を提案し、その信頼性、有効性を明らかにしているが、ここでは、これらの研究をさらに発展させ、各断面が曲げモーメントおよび軸力を受ける剛節骨組構造物の材料非線形解析を行う方法を提案し、変位法による解との比較・検討を行った結果について述べるものである。

2. 剛節骨組構造物の全コンプリメンタリーエネルギーの算定

剛節骨組構造物の各部材のコンプリメンタリーエネルギー Π_{ci} を計算する場合には、まず軸力 N および曲げモーメント M を受ける部材断面のひずみ分布(応力度分布)を決定しなければならない。図-1に示すような非線形の材料からなる部材 i の任意点 x の断面に軸力 N_{ix} および曲げモーメント M_{ix} が作用する場合、その断面のひずみ分布 $\epsilon_{ix}(y)$ (応力度分布 $\sigma_{ix}(y)$)は平面保持の仮定および断面内力と作用力のつり合い条件を利用して部材断面の上、下縁ひずみ ϵ_u, ϵ_l を未知数とする連立非線形方程式を導入し、これをNewton-Raphson法により解くことにより決定することができる。求められた応力度分布 $\sigma_{ix}(y)$ を用いて、部材 i の点 x における部材断面(断面積 $A_i(x)$)のコンプリメンタリーエネルギー $\pi_{ci}(x)$ は次式により計算される。

$$\pi_{ci}(x) = \int_{A_i(x)} \beta_{ix}(y) dA, \quad \beta_{ix}(y) = \int_0^{\sigma_{ix}(y)} \epsilon(\sigma) d\sigma \quad (1)$$

式(1)の $\pi_{ci}(x)$ を部材 i の全長にわたって積分することにより、部材 i のコンプリメンタリーエネルギー Π_{ci} を求めることができる。

$$\Pi_{ci} = \int_{\ell_i} \pi_{ci}(x) dx, \quad \ell_i: \text{部材 } i \text{ の長さ} \quad (2)$$

本研究では、式(2)の積分計算をシンプソンの公式を用いて行っている。 Π_{ci} を全部材について加え合わせれば、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c が求められる。

3. コンプリメンタリーエネルギー最小化による剛節骨組構造物の

材料非線形解析問題の定式化

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、つり合い条件および境界条件を満たす種々の応力分布の中で、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーが最小となる応力分布が真の解となる。本研究では、剛節骨組構造物の各部材を図-2(a)に示すように各節点で切断し、部材 i の端力を図-2(b)に示すように定義すると、部材 i 全体に関する3つの力のつり合い条件より未知部材端力を図-2(c)に示すように3個に減少させることができる。この H_{ij} 、 M_{ij} 、 M_{ik} を用いて部材 i の任意点 x における軸力 N_{ix} および曲げモーメント M_{ix} が計算でき、この N_{ix} 、 M_{ix} を用いて、2.で述べた方法により部材 i のコンプリメンタリーエネルギー Π_{ci} および構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c を計算することができる。このように Π_{ci} および Π_c は式(3)のごとく H_{ij} 、 M_{ij} 、 M_{ik} の関数として表わすことができる。

$$\Pi_c = \sum \Pi_{ci}(X_i) = \Pi_c(X) \quad (3)$$

ここに、 $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$, n : 部材数

$$X_i = [H_{ij}, M_{ij}, M_{ik}]^T = [X_{3i-2}, X_{3i-1}, X_{3i}]^T$$

次に、各節点におけるつり合い条件 $\sum H=0$ 、 $\sum V=0$ 、 $\sum M=0$ を導入する。図-2(b)に示す部材端力を H_{ij} 、 M_{ij} 、 M_{ik} を用いてマトリッ

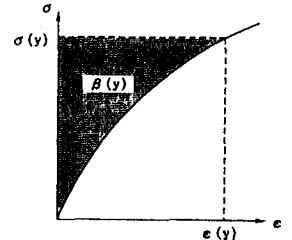


図-1 非線形応力度-ひずみ関係

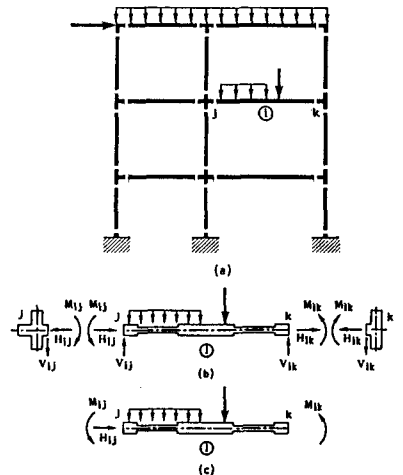


図-2 ラーメン構造物およびその部材要素

クス表示し、これを全部材についてまとめて表現すると、すべての可動節点における力のつり合い方程式は次式のように表わされる。

$$F - TA = F - TK - TBX = 0 \quad (4)$$

ここに、 T ：部材座標系から全体座標系への変換マトリックス($m \times 6n$)、 F ：各可動節点に作用する外力ベクトル、 m ：自由度数、 A ：各部材の部材端力ベクトル、 K ：各部材の部材間に作用する外力ベクトル、 B ： A と X の関係を表わす $6n \times 3n$ のマトリックス

以上より、剛節骨組構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題は次式のように定式化できる。

find X , Such that

$$\text{minimize } \Pi_c(X) = \sum_i \Pi_{c_i}(X_i) \quad \text{subject to } g = P - CX = 0 \quad (5)$$

ここに、 $g = [g_1(X), \dots, g_m(X)]^T$ は各可動節点における力のつり合い方程式、

$$P = F - TK, C = TB$$

式(5)の線形等号制約条件付き最小化問題は、これまでトラス構造物の材料非線形解析に適用してその信頼性・有効性が明らかとなっている逐次二次計画法(SQP)およびLPの手法を用いて解くことができる。

4. 解析結果および変位法との比較

表-1に、図-4に示すピン結合部材を有する門形ラーメンが図-3に示す材料Aよりなる場合の解析結果および変位法による解との比較、表-2に本解析法と変位法の所要計算時間および反復計算回数の比較を示す。両解法による解の相対誤差はほとんどすべての部材端力において0.01~0.07%、例外的に部材端力の絶対値の小さな部材で0.27, 1.43%であり、両解法の解はきわめて良く一致しているといえる。次に本研究の方法による解の収束性は、表-2より明らかのように、不静定次数が少なく、応力度一ひずみ関係曲線がなめらかなほど解の収束性は良くなっている。しかし、収束性の悪い場合でも30回程度で収束し実用性は高い。また、最終解を得るために必要とした計算時間は、比較的部材数の少ないラーメン構造物では変位法の方が本研究の解法と比較して少ない計算時間で解を得ているが、部材数が多くなるに従い逆に本解析法の方が少ない計算時間となっている。

以上の検討結果より、本解析法は定式化が単純であり、いかなる非線形材料に対しても全く同様に適用でき、変位法などの有限要素法のように解の精度を上げるために要素の分割を小さくする必要がなく、きわめてわずかの計算機の記憶容量で解くことが可能であり、しかも部材数が増加するに従い、変位法と比較してより少ない計算時間できわめて信頼性の高い解が得られることが明らかとなった。

表-2 所要計算時間(分)及び反復回数の比較¹⁾

解析モデル		1	2	3	4
部材数	不静定次数	3	9	5	10
A ²⁾	CEM ³⁾	0.522 (16)	0.707 (24)	0.826 (27)	1.903 (31)
	FEM ⁴⁾	0.208 (13)	1.869 (29)	0.669 (15)	** 40 (103)
B	CEM	0.565 (15)	1.145 (22)	1.002 (23)	2.682 (31)
	FEM	0.232 (12)	1.022 (15)	0.579 (12)	6.800 (17)
C	CEM	0.190 (13)	0.329 (15)	0.368 (15)	1.211 (25)
	FEM	0.147 (9)	0.614 (9)	0.383 (8)	3.599 (9)

1) FACOM M-360AP による計算結果 2) 材種 3) エネルギー法

4) 変位法 (ただし、() 内の数値は反復回数を表わす。)

** 収束せず (EA, EIの最大の変化量の割合=0.0008)

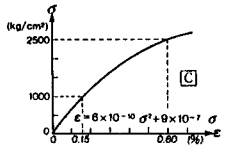
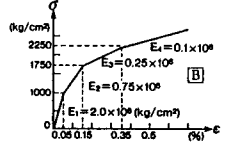
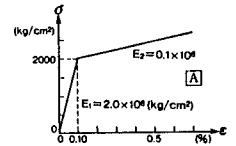


図-3 3種類の非線形材料の
応力度一ひずみ関係

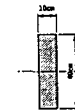
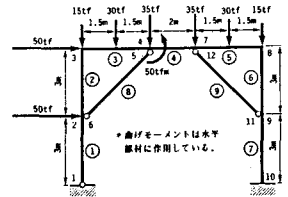


図-4 門形ラーメン

表-1 門形ラーメンの解析結果および変位法との比較

材 種	材 料 A			
解析方法	ENERGY法	変位法	誤 差 ¹⁾	ϵ_u, ϵ_s
$H_{1,2}$ ¹⁾ $M_{1,2}$ ²⁾	-44.51 87.44	-44.50 87.48	0.022% 0.046%	-0.499% 0.455%
$H_{2,2}$ $M_{2,2}$	68.35 -87.44	68.40 -87.48	0.073% 0.046%	-0.519% 0.450%
$H_{3,4}$ $M_{3,4}$	94.69 68.42	-94.74 68.47	0.053% 0.073%	-0.172% 0.136%
$H_{4,7}$ $M_{4,7}$	-70.85 -52.56	-70.84 -52.53	0.014% 0.057%	0.090% -0.108%
$H_{4,9}$ $M_{4,9}$	-2.75 -96.48	-2.79 -96.50	1.434% 0.021%	0.781% -0.785%
$H_{5,9}$ $M_{5,9}$	115.49 96.48	115.50 96.50	0.009% 0.021%	0.728% -0.901%
$H_{1,10}$ $M_{1,10}$	-115.49 116.08	-115.50 116.02	0.009% 0.052%	-1.656% 1.399%
$H_{8,5}$ $M_{8,5}$	-33.71 159.43	-33.80 159.39	0.266% 0.025%	0.004% -0.020%
CPU(ITE) ³⁾	0.707(24)	1.869(29)		

1) 部材端力(tf) 2) 部材端力モーメント(tf-m)

3) FACOM M-360AP による計算時間(分)

(ただし、() 内の数値は反復計算回数を表わす)

4) ENERGY法による解と変位法による解の相対誤差 (1tf=9.81kN)