I-96

大変形弾塑性理論における塑性スピンの影響について

名古屋工業大学　正　員　小　畑　　誠
名古屋工業大学　正　員　後　藤　芳　顯
名古屋工業大学　正　員　松　浦　　聖

1　はじめに

塑性状態で崩壊にいたる鋼構造物、あるいは地盤の耐荷力解析などに、いわゆる極限解析とは別に、さらには応力集中部の弾塑性解析に、大変形弾塑性解析を応用する試みが数多くなされている。これらの解析では多くの場合、くびれ、あるいはひずみ局所化現象によるせん断帯の発生などを伴い、かなり大きなひずみをあつかうことになり、ひずみの大きな領域での材料の性質が、臨界、臨界後の挙動を知るうえで非常に大切となる。ここでは金属の塑性を対象に現象学的塑性論と結晶塑性学にもとづく微視的塑性論を対比させながら、大変形領域での弾塑性挙動について考える。特に、変形勾配テンソルの弾塑性極分解[1)]をもとに、現象学的塑性論におけるスピンの弾塑性分解の一つの方法を考えて、応力とひずみの関係における塑性スピンの影響について考察をする。

2　定式化

まず結晶塑性学にもとづく単結晶の構成方程式について考える。結晶面でのすべりが塑性変形の唯一の原因であるとの立場にたてば、弾性部分と塑性部分との和として表わすことができる速度勾配テンソルの塑性部分は変形後の結晶の幾何構造に依存したテンソルp_{ij}，ω_{ij}とすべり率$\dot{\gamma}$用いて次のようになる。

$$L^p_{ij}=D^p_{ij}+W^p_{ij}=\Sigma\dot{\gamma}^\alpha p^\alpha_{ij}+\Sigma\dot{\gamma}^\alpha\omega^\alpha_{ij} \qquad (1)$$

Σはすべてのすべり面（α）についての和をとるものとする。D^p_{ij}とW^p_{ij}はL^p_{ij}のそれぞれ対称、逆対称部分すなわち塑性変形率と塑性スピンを示す。したがって、弾性変形率、弾性スピンもこれより求めることができる。微視的には弾性変形は結晶格子の捩りとみなすから、弾性の関係式としては次のものが用いられる。[2)]

$$D^e_{ij}=L^{-1}_{ijkl}\overset{\circ}{\tau}_{kl},\qquad \overset{\circ}{\tau}_{ij}=\dot{\tau}_{ij}-W^e_{ik}\sigma_{kj}+\sigma_{ik}W^e_{kj} \qquad (2)$$

これにより、次式が得られる。

$$\overset{\circ}{\tau}_{ij}=L_{ijkl}D_{kl}-\Sigma\left(L_{ijkl}p^\alpha_{kl}+\omega^\alpha_{ik}\sigma_{kj}-\sigma_{ik}\omega^\alpha_{kj}\right)\dot{\gamma}^\alpha \qquad (3)$$

ここで$\overset{\circ}{\tau}_{ij}$はJaumann変化率である。これは速度依存型の塑性についても有効な表現である。すべり率$\dot{\gamma}$と$\overset{\circ}{\tau}_{ij}$の関係が与えられれば、完全な形での構成方程式が得られることになる。この場合には、通常の現象学的塑性理論ではあらわれない塑性スピンに関する項が自然と含まれておりその意味も明解である。

次に現象学的な記述を考える。変形勾配テンソルF_{ij}は形式的にLeeにしたがい、中間変形状態を考えて次のように弾塑性極分解表現できる。

$$F_{ij}=F^e_{ik}F^p_{kj} \qquad (4)$$

ここに、e、pはそれぞれ弾性、塑性変形寄与分を表わす。この表現は中間変形状態になんらかの仮定をもうけることによって一意的に定まる。これにより、速度勾配テンソルは単結晶における場合と同様に速度勾配テンソルの弾塑性分解表現が得られる。

$$L_{ij}=\dot{F}_{ik}F^{-1}_{kj}=\dot{F}^e_{ik}F^{e-1}_{kj}+F^e_{im}\dot{F}^p_{mn}F^{p-1}_{mk}F^{e-1}_{kj}=L^e_{ij}+L^p_{ij} \qquad (5)$$

中間変形状態の物理的な解釈については議論のあるところであるが、すくなくとも以下の定式化には非常に

有用である。Leeは中間変形状態を弾性除荷状態と考え等方弾性体に対してはF^{e}_{ij}によって表わされる変形は剛体回転を含まない、すなわちF^{e}_{ij}を対称テンソルとした。しかしながら、中間変形状態を弾性除荷によって物理的に到達しうるものとみなすことは多くの場合無理があることは指摘されている通りである。

単結晶の弾塑性変形を考えた場合、結晶面上におこるすべりによって起こる塑性変形は結晶面のすべりの方向は変化させないことを考慮すると、現象学的アプローチにおけるF^{p}_{ij}の一つの選択として、F^{p}_{ij}が剛体回転を含まないものとすることが考えられる。この選択にしたがえばF^{p}_{ij}は対称となりそれによりスピンテンソルの弾塑性分解も一意的に決定できる。すなわち、塑性スピンW^{p}_{ij}は塑性変形率テンソルD^{p}_{ij}を用いて次のように表わすことができる。

$$W^{p}_{ij}=S_{ijkl}D^{p}_{kl} \tag{6}$$

ここにS_{ijkl}はF^{e}_{ij}，F^{p}_{ij}のみによって決定できる。微視的なアプローチにならい弾性変形を式（１）で定義し塑性変形に対しＪ２関連流れ理論を用いると塑性載荷状態に対する構成方程式は次式で与えられることになる。

$$\overset{\circ}{\tau}_{ij}=L_{ijkl}D_{kl}-(L_{ijkl}+S_{ipkl}\sigma_{pj}-\sigma_{ip}S_{pjkl})D^{p}_{kl}、D^{p}_{ij}=\frac{1}{H}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\overset{\circ}{\tau}_{kl} \tag{7}$$

ここで

$$f=\sqrt{\frac{3}{2}(\tau'_{ij}-\alpha'_{ij})(\tau'_{ij}-\alpha'_{ij})}-\bar{\tau} \tag{8}$$

ひずみ硬化係数であるＨについては等方硬化と移動硬化の和の複合硬化を考えるものとする。古典的な塑性理論では現われることのなかった塑性スピンの影響は式（７）のS_{ijkl}を含む項となって現われている。いわゆるバックストレスであるα_{ij}のτ_{ij}と同様に定義される客観的増分に対しPragar則を当てはめるものとする。拡張された意味でのPrager則はα_{ij}の客観的増分と塑性変形率テンソルが共軸であることを主張するものであるが、これはすくなくとも弾性的に等方的である材料に対しては微視的な観点からも妥当なものであると考えられる。

３　数値計算例

簡単な数値計算例として純せん断を受ける場合の物質の挙動を解析する。$E=21000kgf/mm^2$, $\nu=0.3$,初期降伏応力$\sigma_Y=29kgf/mm^2$、$H/\sigma_Y=5.2$とし、移動硬化のみとした。結果は図１に示す。破線は塑性スピンの影響を考えない、すなわち式（５）で$S_{ijkl}=0$とした場合の結果である。良く知られているように$S_{ijkl}=0$の場合は応力成分の振動が見られる。この場合では、塑性スピンを考えることにより異常な応力の挙動が抑えられていることがわかる。

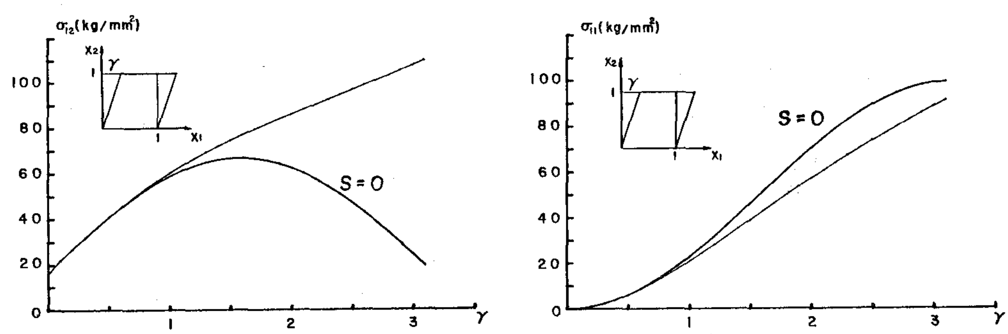

図１　応力－ひずみ関係

＜参考文献＞　1) E. H. Lee, J. Appl. Mech., 1969. 2) R. Hill, J. Mech. Phys. Solids, 1966.