I-95　有限要素連立一次方程式の解法のアルゴリズムに関する一検討

東京工業大学　学生員　中川　昌弥
東京工業大学　正員　吉田　裕
東京工業大学　正員　依知川　哲治

1．はじめに

工学問題の数値解析においては、連立一次方程式を解くことが解析の要となる。連立一次方程式の解法は大別して、消去法の系統の直接法とＣＧ法に代表される反復法とに分けられるが、前処理の仕方などには数多くの変化が考えられ、実際のプログラム化の段階の違いを考えれば、解法の種類は無数にあると言っても過言ではない。一方、最近では、スーパーコンピュータが普及し数値解析の適用能力がさらに格段に開かれることが予想されるが、この場合には特にプロセッサー・システムと解法との適合性が計算効率に大きく影響することになる。

本研究は、構造問題の有限要素方程式を対象として、種々の連立一次方程式の算法による具体的な解析を、スーパーコンピュータを含むいくつかの計算機システムによって実行することにより、計算時間、記憶容量等を比較し、それぞれの解法の計算機システムとの適合性について検討を加えたものである。

2．用いた計算機システムの概要

現在のスーパーコンピュータは、演算および記憶素子を高速化してマシンサイクルを短縮し、演算パイプラインのピッチをあげる方向にあるもの（S-820, CRAY-3, など）、演算及び記憶素子の高速化の限界を見越して、演算の多重処理化をめざすもの（X-MP, ETA10, など）に分類される[1]。

本研究で解析に用いた計算機システムを、表－１に示す。

表－１　使用した計算機

使用した計算機	マシンサイクル	最大性能
ETA10-E (1CPU)	10.5 nsec	380 MFLOPS
HITAC S-820/80	4.0 nsec	3000 MFLOPS
HITAC M-660K	———	約 5 MFLOPS

3．対象とする連立一次方程式の解法の概要

本研究で対象とした連立一次方程式の解法は、代表的な直接法としてのスカイライン法と反復法の代表としてのＣＧ法、および節点の自由度をブロックとする対角上の部分マトリックスを対象として不完全コレスキー分解を介したＩＣＣＧ法に分類される解法の３つである。以下にその概要を示す。

1)スカイライン法・・スカイライン法は、係数行列の対角項から最も離れた非零要素までを記憶して、コレスキー法を適用する解法である。有限要素法では係数行列は一般に不規則な疎行列であり、記憶スペースには係数行列の零要素に相当する部分も多く必要とすることになる。

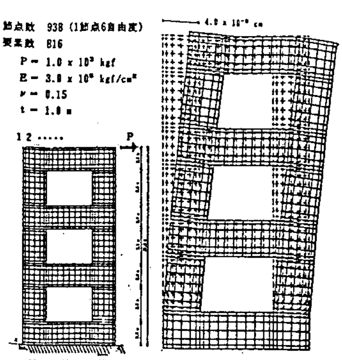
2)ＣＧ法・・・・・・ＣＧ法は、連立一次方程式の残差ベクトルが直交するように解を修正しながら、有限回の反復計算で解を求めようとするものである。係数行列の積の計算だけで解き進めることが可能であり、係数行列の非零要素だけ記憶すればよいので、記憶容量の面では非常に有利である。

3)ＩＣＣＧ法・・・・ＩＣＣＧ法は、前処理として元の係数行列を不完全コレスキー分解する過程を経ることにより、ＣＧ法の収束を速め、要する容量と計算時間に対する要求を両方とも満たそうとするものである。ここでは不完全コレスキー分解として、節点の自由度のブロックを単位とする部分マトリックスによる下記のような方法を用いた。

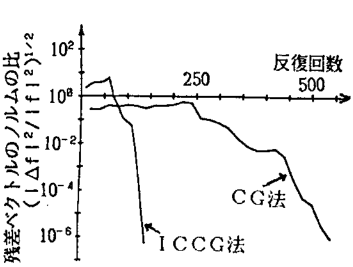
$$\mathbf{u}_{11} = \mathbf{a}_{11}$$
$$\mathbf{u}_{ii} = \mathbf{a}_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{u}_{ki}^{T} \mathbf{d}_{kk} \mathbf{u}_{ki}$$
$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}$$
$$\mathbf{d}_{ii} = \mathbf{u}_{ii}^{-1}$$

4．解析対象

解析対象は、図－１に示すような平面応力問題である。



図－１　解析対象



図－２　ＣＧ法とＩＣＣＧ法の収束状況

5．各種解法と計算機システムの適合性について

1)係数行列に必要な容量

解析のために必要な記憶領域は、CG法、ICCG法では節点番号の振り方によらず約311KBで、スカイライン法ではその4倍の約1.34MBである。

2)計算時間について

対象とした各種解法および用いた計算機システムによって、解析に要した計算時間を表－2，3にまとめて示す。また、CG法およびICCG法による収束の状況を図－2に示す。

表－2　CG法とICCG法に要した計算時間

		前処理過程(s)	反復計算回数	反復計算の全過程	反復計算1回当り	全ての計算過程	VPUとSPUの比
S-820	CG法	——	539 回	10.37 (s) 4.27 (s)	0.019 (s)	14.83 (s) 6.61 (s)	44.6 %
	ICCG法	0.17(s) 0.09(s)	141 回	8.02 (s) 3.08 (s)	0.056 (s)	12.62 (s) 4.95 (s)	39.2 %
ETA10	CG法	——	539 回	23.81 (s)	0.044 (s)	38.06 (s)	——
	ICCG法	2.15(s)	142 回	20.22 (s)	0.142 (s)	36.73 (s)	——
M-660	CG法	——	539 回	51.66 (s)	0.096 (s)	80.14 (s)	——
	ICCG法	0.89(s)	142 回	52.45 (s)	0.369 (s)	81.09 (s)	——

表－3　スカイライン法に要した計算時間

	コレスキー分解と後退代入	全ての計算過程
S-820	0.39 (s) 0.10 (s)	4.84 (s) 1.91 (s)
ETA10	1.06 (S)	23.32 (S)
M-660	2.81 (S)	47.99 (S)

ICCG法ではCG法に比べて反復計算回数は減少しているが、反復計算毎に後退代入が必要となり、前処理における不完全コレスキー分解を含めると、結果的には同じ程度の時間がかかっている。

3)CG法の収束性に関して

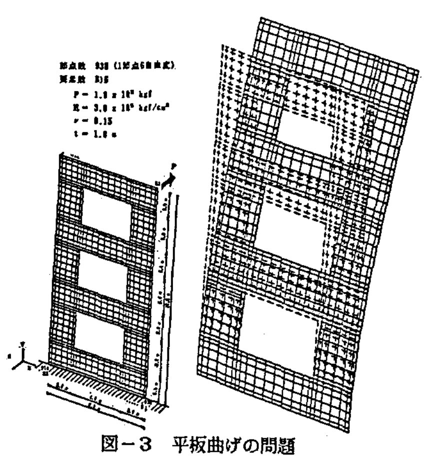
反復法に関してはその収束性が問題となる。CG法は理論的には自由度の数だけの反復計算で解が得られるはずであるが、数値計算には必然的に丸めの誤差が伴うので、問題によっては収束が非常に悪くなる場合がある。一例として、ここで対象とした面内問題と等しい自由度数の平板曲げの問題（図－3）を解析した場合の収束の状況を図－4に示す。自由度数2,745に対し2倍以上の反復計算を要している。ETA10とS-820での反復計算回数が異なっているが、これはS-820が仮数部に56ビット使っているのに対してETA10では47ビットであるために精度に違いが生じるためである。このことは、CG法の収束性に丸めの誤差が大きく影響することを端的に表している。

6．おわりに

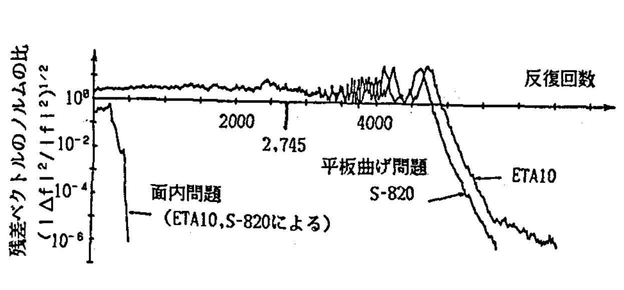
以上、種々の連立一次方程式の解法による解析を、いくつかの計算機システム上で実行し比較検討したが、効率的な解法を構成するためには、解析対象、解法、パイプライン演算機を含むプロセッサ・システム、それぞれの特性を考慮することが必要であり、プログラミングの技術を含め、多くの検討課題が残されている。

参考文献

1)　唐木幸比古:「スーパーコンピュータの現状と展望」，第25回東京工業大学総合研究館講演会要旨集
2)　村田，小国，唐木:「スーパーコンピュータ」，丸善，1985



図－3　平板曲げの問題



図－4　面内問題と平板曲げ問題の収束の状況（CG法）