

新潟大学大学院 学生員 中川 渉
新潟大学工学部 正 員 阿部 和久

1. はじめに 著者らは以前に、二次元ポテンシャル問題を対象に、h法による境界要素自動分割の一方法を示した¹⁾。その結果、「積分方程式の離散化による残差」に基づく自動分割法が有効であり、節点近似値の誤差を評価することも可能であることが確かめられた。ここでは、本手法を二次元静弾性問題に適用した結果について報告する。

2. Indicator および estimator 二次元平面ひずみ問題に対し、Somigliana 恒等式を適用し境界積分方程式を導くと次式を得る。

$$c_{ij}(x) u_j(x) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(x, y) u_j(y) d\Gamma_y + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x, y) p_j(y) d\Gamma_y \quad (i=1, 2) \quad (x \in \Gamma) \quad \dots \dots (1)$$

ここで u_j, p_j は境界 Γ 上の変位、表面力成分あり、 u_{ij}^*, p_{ij}^* は Kelvin 解とする。

式(1)に対する境界要素近似解 u_i, p_i の節点 x_k での誤差 Eu_i^k, Ep_i^k と、積分方程式(1)の離散化による残差 R_i との関係は次のようになる。

$$c_{ij}(x_k) Eu_j^k + \sum_{\ell=1}^{Np} \int_{\Gamma_{\ell}} p_{ij}^*(x_k, y) \phi_{\ell}(y) d\Gamma_y \cdot Eu_j^k + \sum_{\ell=1}^{Nu} \int_{\Gamma_{\ell}} u_{ij}^*(x_k, y) \phi_{\ell}(y) d\Gamma_y \cdot Ep_j^k = R_i^k \quad \dots \dots (2)$$

$$R_i^k = - \sum_{\ell=1}^{Ne} \int_{\Gamma_{\ell}} p_{ij}^*(x_k, y) (u_j - \hat{u}_j) d\Gamma_y + \sum_{\ell=1}^{Ne} \int_{\Gamma_{\ell}} u_{ij}^*(x_k, y) (p_j - \hat{p}_j) d\Gamma_y \quad (Eu_j^k = u_j^k - \hat{u}_j^k, Ep_j^k = p_j^k - \hat{p}_j^k) \quad \dots \dots (3)$$

ここで、 Ne は全要素数、 Nu, Np はそれぞれ変位、表面力が既知な境界要素数、 ϕ_{ℓ} は補間関数であり、今回は一定補間とする。また $\hat{u}_j, \hat{p}_j$ は真の解 u_j, p_j を補間して得られる関数である。

式(2)を近似解 $\hat{u}, \hat{p}$ を求める際に用いる係数行列 $[K]$ を用いて表すと次式となる。

$$[K] [Ep, Eu]^T = \{R\} \quad \dots \dots (4)$$

各節点での誤差 Eu, Ep は $\{R\}$ が何らかの方法で評価できれば式(4)より求めることができる。そこで、1)と同様の方法で $u_j - \hat{u}_j, p_j - \hat{p}_j$ を差分近似し、 $\{R\}$ を求めることとした。

なお、自動分割を進める際のindicatorとしては次のものを考えた。

$$\lambda_1^{kl} = \text{Max} \{ |\alpha_{11}^{kl}|, |\alpha_{12}^{kl}|, |\beta_{11}^{kl}|, |\beta_{12}^{kl}| \} \quad \dots \dots (5.a)$$

$$\lambda_2^{kl} = \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 (\alpha_{ij}^{kl} + \beta_{ij}^{kl}) \right]^2 \quad \dots \dots (5.b)$$

$$\alpha_{ij}^{kl} = \int_{\Gamma_{\ell}} p_{ij}^*(x_k, y) (u_j - \hat{u}_j) d\Gamma_y, \quad \beta_{ij}^{kl} = \int_{\Gamma_{\ell}} u_{ij}^*(x_k, y) (p_j - \hat{p}_j) d\Gamma_y \quad (k, \ell = 1, \dots, Ne; i, j = 1, 2)$$

一方、全体の精度を評価するerror estimatorとしては以下のものを用いた。

$$\eta_1 = \left[\sum_{k=1}^{Ne} |R^k|^2 \cdot \epsilon_k / \sum_{k=1}^{Ne} |u^k|^2 \cdot \epsilon_k \right]^{1/2} \quad (\epsilon_k: \text{要素長}) \quad \dots \dots (6.a)$$

$$\eta_2 = \left[\text{Max} |R^k|^2 / \text{Max} |u^k|^2 \right]^{1/2} \quad \dots \dots (6.b)$$

3. 自動分割法の検討 次の分割段階で細分割の対象となる要素としては、以下の条件を満たす全ての節点 k に対して λ_1^{kl} または λ_2^{kl} の最大を与える要素 ℓ を採用した。

$$\text{節点 } k: \left. \begin{array}{ll} R_i^k \geq \beta \cdot \text{Max} \{ R_i^k \} & \text{for } \lambda_1^{kl} \\ |R^k| \geq \beta \cdot \text{Max} \{ |R^k| \} & \text{for } \lambda_2^{kl} \end{array} \right\} \quad (0 < \beta \leq 1) \quad \dots \dots (7)$$

error indicator および β の選択についての具体的な一例を通しての検討結果を以下に示す。例題としては図-1に示した平面応力一様引張りを採用した。

(1) error indicator 弾性問題はポテンシャル問題と異なり、境界値等がベクトル量となる。よって、式(5),(7)のように R_i の各方向の成分を独立に扱う方法 Case I と、合成して扱う方法 Case II とを比較検討することとした。両者に対し、ポアソン比 $\nu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ の下で自動分割を行った結果、 $\nu = 0.2$ の場合に対しCase I で図-2に示すような非対称な分割が得られた。この問題に対しては対称な分割が与え

られるのが自然であるから、以上より Case I は場合によっては不適切な分割を与え得ることがわかる。なお他のポアソン比に対しては Case I, II 共に同じ対称な分割列が得られた。

(2) β の値 β の値を小さくすれば、一度の分割で分割の対象となる要素数は多くなり、分割終了までのステップ数は少なくなるが、無駄な分割を行う恐れがある。一方、 β を 1 に近くすると、終了までのステップ数が増加することになる。そこで、Case II のもとで、 $\nu = 0.3$ に対し β を変えて分割を行い、分割終了までの CPU 時間、Step 数、最終分割要素数を比較した。結果は表-1 のとおりである。CPU 時間、Step 数、要素数などから、 $\beta = 0.3 \sim 0.5$ が適当であることがわかった。なお、 $\beta = 0.8, 0.9$ の場合も、最終分割は $\beta = 0.3 \sim 0.5$ の場合と同じであった。 $\beta = 0.5, 0.8, 0.9$ における η_1 の収束状況を比較すると図-3 のとおりである。

表-1 β の変化と分割状況

β	cut time (s)	Step 数	最終分割要素数
0.1	11.620	5	64
0.2	8.790	5	57
0.3	5.644	5	48
0.4	5.648	5	48
0.5	5.645	5	48
0.6	19.311	7	74
0.7	13.032	8	56
0.8	11.474	9	48
0.9	19.520	15	48

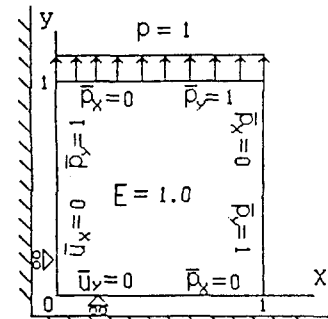


図-1 解析例

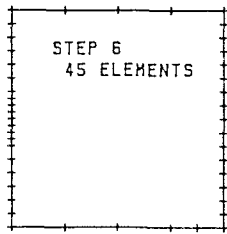


図-2 Case I の非対称分割

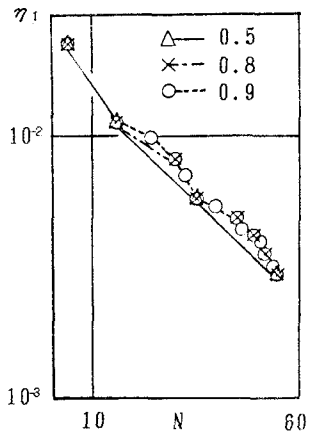


図-3 節点数 N と η_1

4. 節点近似値の誤差評価 式(4)を用いた誤差評価の妥当性を、図-1の問題を例に検討する。 $y = 1$ の辺上の最終分割における x, y 方向変位の誤差の予測値を真の誤差と合わせて図-4(a), (b) に示す。本手法により、誤差が適切に評価されていることがわかる。

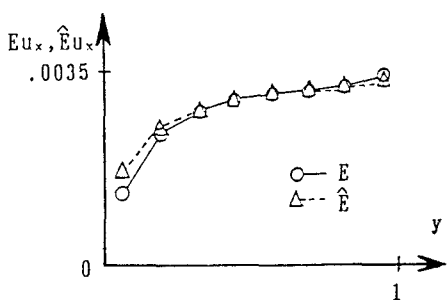


図-4(a) x 方向変位の誤差

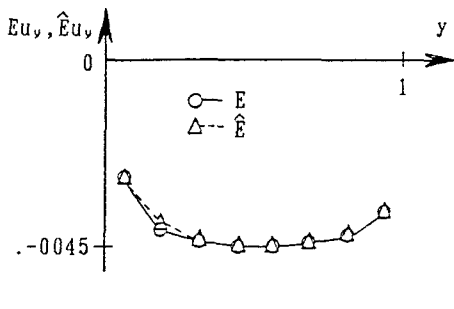


図-4(b) y 方向変位の誤差

5. 結論 積分方程式の離散化による残差に基づく自動要素分割法の弾性問題への適用について検討した。また、節点近似値の誤差を比較的精度良く評価できることが確かめられた。

<参考文献>1) 阿部・中川：境界要素法の要素自動分割と誤差予測に関する一考察，土木学会第43回年次学術講演会 1988年