

福井大学工学部 正員 福井卓雄, 福井大学大学院 礪 浩司

1. はじめに

波動方程式の直接時間積分を用いた境界要素法による数値解は, 領域型の解法(差分法, 有限要素法など)のそれとはまったく異なる特性を有する. とくに, 時間ステップの幅を小さくしていても必ずしも数値解が安定しない事実は何人かの研究者によっても報告されている. そこで本論文では, 解が不安定になる条件を明らかにするために, 離散系の持つ周波数特性と周波数領域での境界要素モデルとの関係, および, 仮想固有値に対応する時間ステップ幅をとったときの数値解の安定性について数値実験を行い, 解の安定性について検討した. ここでの結果より境界要素法による数値解の特性について, 一つの方向性が見つめたと思われる.

2. 時間ステップ境界要素法

等方均質弾性体中の円孔にSH波が入射したときの散乱問題について考える. 時間ステップ法の境界積分方程式は[1]より,

$$\frac{1}{2}u^N(\mathbf{x}) + \sum_{M=1}^N \left[\int_{\partial B} B^{N-M}(\mathbf{x};\mathbf{y}) u^M(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} - \int_{\partial B} A^{N-M}(\mathbf{x};\mathbf{y}) s^M(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \right] = \hat{u}(\mathbf{x}, N\Delta t) \quad (1)$$

である. ここで u^N , s^N は第 N ステップにおける境界変位および応力, $\hat{u}$ は入射波で, 時間分割幅は Δt である. 積分核 A^N , B^N の形は境界変位・応力の時間軸上での近似方法に依存する. ここでは, 変位は区分線形, 応力は階段関数で近似した. このとき,

$$D(\mathbf{x};\mathbf{y})[\tau] = \frac{1}{2\pi\rho c^2} \log|\chi + \sqrt{\chi^2 - 1}| H(\chi - 1), \quad T(\mathbf{x};\mathbf{y})[\tau] = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial R}{\partial n} \sqrt{\chi^2 - 1} H(\chi - 1), \quad R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \chi \equiv \frac{c\tau}{R}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} A^0(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= D[\Delta t], & A^{N-M}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= D[(N-M+1)\Delta t] - D[(N-M)\Delta t], \\ B^0(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= -\frac{1}{\Delta t} T[\Delta t], & B^{N-M}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= -\frac{1}{\Delta t} \{ T[(N-M+1)\Delta t] - 2T[(N-M)\Delta t] + T[(N-M-1)\Delta t] \} \end{aligned}$$

である. ここに, c は弾性体の横波速度, ρ は質量密度, n は境界の外向き法線, $H(X)$ はHeaviside関数である. 境界上の関数 u^N , s^N に対して適当な近似

$$u^N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m u^N \psi_j(\mathbf{x}), \quad s^N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m s^N \psi_j(\mathbf{x})$$

を導入して, 式(1)を離散化する. m 個の選点 $\mathbf{x}_i$ をとれば, 式(1)は線形代数方程式となる. 第 N ステップまでの方程式をまとめて表すと,

$$\begin{bmatrix} B^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B^1 & B^0 & 0 & \dots & 0 \\ B^2 & B^1 & B^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{N-1} & B^{N-2} & B^{N-3} & \dots & B^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ \vdots \\ u^N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A^1 & A^0 & 0 & \dots & 0 \\ A^2 & A^1 & A^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1} & A^{N-2} & A^{N-3} & \dots & A^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^1 \\ s^2 \\ s^3 \\ \vdots \\ s^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}^1 \\ \hat{u}^2 \\ \hat{u}^3 \\ \vdots \\ \hat{u}^N \end{bmatrix} \quad (2)$$

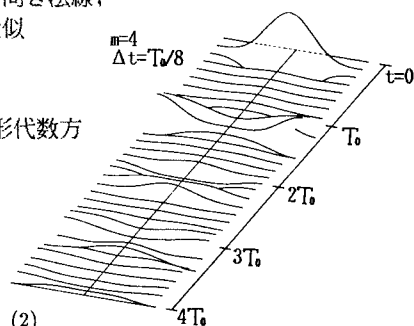


図1 誤差の伝播(1)

の形となる. ここに,

$$[B^0]_{ij} = \frac{1}{2} \psi_j(\mathbf{x}_i) + \int_{\partial B} B^0(\mathbf{x}_i;\mathbf{y}) \psi_j(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}, \quad [B^M]_{ij} = \int_{\partial B} B^M(\mathbf{x}_i;\mathbf{y}) \psi_j(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \quad (M=1,2,3,\dots),$$

$$[A^M]_{ij} = \int_{\partial B} A^M(\mathbf{x}_i;\mathbf{y}) \psi_j(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \quad (M=0,1,2,3,\dots), \quad [u^M]_j = u^M_j, \quad [s^M]_j = s^M_j, \quad [\hat{u}^M]_i = \hat{u}(\mathbf{x}_i, M\Delta t)$$

である. 適当な境界条件が与えられたとき方程式(2)は1行目から順に解かれることになる. Dirichlet問題の場合に, 入射波を0, 第1ステップ目に単位の誤差を導入した場合の計算の一例を図1に示す. 誤差は時間とともに減衰しながら伝播しているのがわかる. ただし, 時間ステップ幅が小さい場合, 数値積分の計算精度が低いと解は発散する傾向にあることが著者らのこれまでの研究によってわかっている. 詳しくは[2,3]を参照されたい.

3. 解の安定性と仮想固有値

式(2)は、適当な境界条件が与えられれば、マトリクスで記述された自己回帰式とみることができる。すなわち、Dirichlet問題のときの第 N ステップ目を支配する方程式は、

$$0 = \mathbf{A}^0 \mathbf{s}^N + \mathbf{A}^1 \mathbf{s}^{N-1} + \mathbf{A}^2 \mathbf{s}^{N-2} + \cdots + \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{s}^1 \quad (3)$$

である。ただし、 $\mathbf{s}^N = \mathbf{s}(t)$ 、 $t = N\Delta t$ である。時間領域を周波数領域に変えるために式(3)をフーリエ変換すると次のように表せる。

$$0 = \mathbf{A}(\omega) \mathbf{S}(\omega) \quad (4)$$

ここで、

$$\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^1 e^{-i\omega\Delta t} + \mathbf{A}^2 e^{-2i\omega\Delta t} + \cdots + \mathbf{A}^{N-1} e^{-(N-1)i\omega\Delta t}$$

$$\mathbf{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}(t) e^{-i\omega t} dt$$

であり、 ω は角周波数を表す。式(4)が自明でない解を持つための必要十分条件は、

$$D = \det \mathbf{A}(\omega) \equiv 0$$

である。 $\mathbf{A}(\omega)$ は複素マトリクスであるので

$$D = \det \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \mathbf{A}(\omega) & -\operatorname{Im} \mathbf{A}(\omega) \\ \operatorname{Im} \mathbf{A}(\omega) & \operatorname{Re} \mathbf{A}(\omega) \end{bmatrix}$$

を評価する。ここで、 $\operatorname{Re} \mathbf{A}(\omega)$ 、 $\operatorname{Im} \mathbf{A}(\omega)$ は $\mathbf{A}(\omega)$ の実数部、虚数部を表す。図2に便宜的に ω を変化させたときの D の変化を示す。図中の印(○, △, +)は、 $\omega = 2\pi/n\Delta t$ ($n=2, 4, 8, \dots$) で与えられる実際の角周波数のときの D の値を示す。図より D の値はどの時間分割幅 Δt の場合も部分的な極小値を持ち、印はその極小値を避けていることがわかる。さらに興味深いことは、 ω が対応する周波数領域の問題の仮想固有値に対応するとき、 D は部分的な極小値をもつということである。そこで、仮想固有値に対応するような時間分割幅 Δt を用いて誤差の伝播を計算した。その結果を図3に示す。図3では、誤差は円孔の中心をはさんで相対する境界点に直接伝わりながら確実に伝播している。とくに T_0 (T_0 は波が円孔を通過する時間) 付近で初期値として与えた単位誤差とほぼ同等の値を生じている。すなわち、境界の仮想固有値に対応するような時間ステップ幅をとったとき、数値解は不安定になる可能性があるといえる。

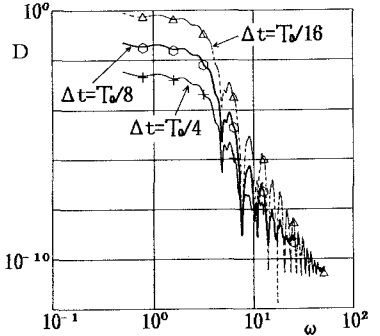


図2 D の変化

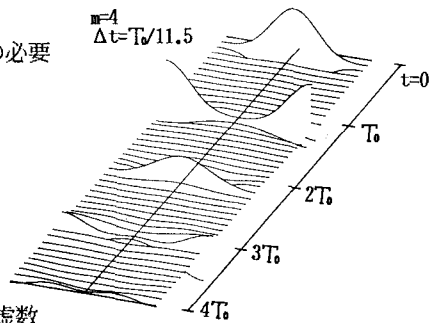


図3 誤差の伝播 (2)

4. おわりに

波動問題を時間ステップ境界要素法を用いて解析する場合、どのような条件のもとで解が不安定になるか検討した。一連の数値実験の結果より、「仮想固有値に対応するような時間ステップ幅をとったとき数値解は不安定になる可能性がある」ことがわかった。現在、この結論を数学的に実証するため研究を続行中である。

参考文献

- [1] Fukui, T., Time marching analysis of boundary integral equations in two dimensional elastodynamics, In R.P. Shaw et al. (Eds.), Innovative Numerical Methods in Engineering, Proc. 4th Int. Symp. on Numerical Methods in Engineering, Springer, 405-410, 1986.
- [2] 福井卓雄, 礪 浩司, 波動問題の時間ステップ法における数値誤差, 境界要素法論文集第5巻, 境界要素法研究会, 269-274, 1988.
- [3] 礪 浩司, 波動問題の時間ステップ境界要素法における数値誤差とその安定性, 福井大学工学部卒業論文, 1989.