I－87　　3次元動弾性問題に対する時間域境界積分方程式

岡山大学工学部　正員　広瀬壮一

1．まえがき

最近、時間域境界積分方程式を3次元動弾性問題に適用しようとする試みが数多くなされているが[1)-4)]、その際問題となるのが計算機の容量と演算時間である。時間域境界積分方程式はconvolution integralを含んでいるので、時間ステップ数が増加すればそれに伴ってマトリックスの次元が大きくなり演算時間も増加するのである。本研究はこのような問題を解消するために、境界積分方程式の数値計算において、時間に関する項と空間に関する項を分離し、空間に関する積分のみを必要とする定式化を試みた。これによって、積分評価は時間ステップには無関係となり、計算時間も一度空間積分の評価がなされた後は大幅に減少することになる。

2．定式化

領域Dを境界∂Dで囲まれた均質等方弾性体とする。このときD内の点ξにおける動弾性変位場uは次の積分方程式で表現できる。

$$u_k(\xi,t)=\int_{\partial D}\{U_{ik}(\mathbf{x},t;\xi|t_i(\mathbf{x},t))-T_{ik}(\mathbf{x},t;\xi|u_i(\mathbf{x},t))\}dS_x \quad \xi\in D \tag{1}$$

ただし、t_iは表面力を表し、U_{ik}、T_{ik}は次式で与えられる積分核である。

$$U_{ik}(\mathbf{x},t;\xi|f)=\frac{1}{4\pi\rho}\left\{\left(\frac{3r_{,i}r_{,k}}{r}-\frac{\delta_{ik}}{r}\right)\int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}}\lambda f(t-\lambda r)d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{r_{,i}r_{,k}}{r}\left[\frac{1}{c_1^2}f(t-\frac{r}{c_1})-\frac{1}{c_2^2}f(t-\frac{r}{c_2})\right]+\frac{\delta_{ik}}{rc_2^2}f(t-\frac{r}{c_2})\right\}$$

$$T_{ik}(\mathbf{x},t;\xi|f)=C_{ijpq}n_j(\mathbf{x})\partial U_{pk}(\mathbf{x},t;\xi|f)/\partial x_q$$

$$r_{,i}=\partial r/\partial x_i,\ r=|\mathbf{x}-\xi|,\ C_{ijpq}=\lambda\delta_{ij}\delta_{pq}+\mu(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp}),$$

$n_j(\mathbf{x})$：点xにおける法線ベクトル、ρ：密度、c_1：P波速度、c_2：S波速度。

境界積分方程式を得るためには式(1)において $\xi\in D\rightarrow\xi_0\in\partial D$ なる極限操作を行えばよい。

$$(\delta_{ik}+e_{ik}^{-}(\xi))u_i(\xi,t)=\int_{\partial D}U_{ik}(\mathbf{x},t;\xi|t_i(\mathbf{x},t))dS_x-\fint_{\partial D}T_{ik}(\mathbf{x},t;\xi|u_i(\mathbf{x},t))dS_x \tag{2}$$

ただし、e^{-}_{ik}は二重層ポテンシャルの自由項である。

3．離散化

式(1)、あるいは(2)を離散化するために変位u_i（表面力t_i）を時間に関しては一次関数η^m（階段関数ζ^m）、空間に関しては適当な形状関数ϕ^Kによって表す。

$$u_i(\mathbf{x},t)=\sum_K\phi^K(\mathbf{x})\sum_m\eta^m(t)u_i^{K;m},\quad t_i(\mathbf{x},t)=\sum_K\phi^K(\mathbf{x})\sum_m\zeta^m(t)t_i^{K;m} \tag{3}$$

ただし、$u_i^{K;m}$、$t_i^{K;m}$は未知パラメータであり、η^m、ζ^mは次式で与えられる。

$$\zeta^m(t)=H(t-(m-1)\Delta t)-H(t-m\Delta t)$$
$$\eta^m(t)=H(t-(m-1)\Delta t)(t-(m-1)\Delta t)/\Delta t-2H(t-m\Delta t)(t-m\Delta t)/\Delta t$$
$$+H(t-(m+1)\Delta t)(t-(m+1)\Delta t$$

$t=N\Delta t$なる時刻を考え、式(3)を式(1)、(2)のT_{ik}に代入すると、T_{ik}は次の3通りに表現される。

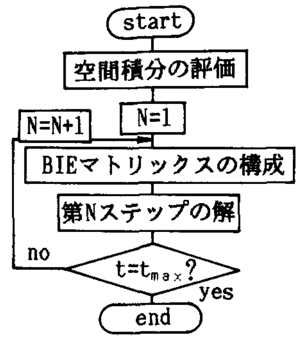

Fig.1

A. $(m-1)c_2\Delta t < (m-1)c_1\Delta t < r \le mc_2\Delta t < mc_1\Delta t$ の時

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu}\Big[\Lambda^{I}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{K}(\mathbf{x})\Big\{(1-m)(1-\kappa)u_i^{K;N-m} + m(1-\kappa)u_i^{K;N-m+1}\Big\} + \Lambda^{III}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{k}(\mathbf{x})\{(m-1)u_i^{K;N-m} - mu_i^{K;N-m+1}\}\Big] \qquad (4.\mathrm{a})$$

B. $(m-1)c_1\Delta t < mc_2\Delta t < r \le mc_1\Delta t < (m+1)c_2\Delta t$ (B.1)
$(m-1)c_1\Delta t < mc_2\Delta t < r \le (m+1)c_2\Delta t < mc_1\Delta t$ (B.2)
または、$mc_2\Delta t < (m-1)c_1\Delta t < r \le (m+1)c_2\Delta t < mc_1\Delta t$ (B.3) の時

$$\begin{aligned} T_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu}\Big[&\Lambda^{I}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{K}(\mathbf{x})\{-mu_i^{K;N-m-1} + (m+1+\kappa(m-1))u_i^{K;N-m} \\ &- \kappa m u_i^{K;N-m+1}\} \\ &+\Lambda^{II}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{K}(\mathbf{x})m^3\Delta t^2\{u_i^{K;N-m-1} - 2u_i^{K;N-m} + u_i^{K;N-m+1}\} \\ &+\Lambda^{III}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{K}(\mathbf{x})\{mu_i^{K;N-m-1} - (m+1)u_i^{K;N-m}\}\Big] \end{aligned} \qquad (4.\mathrm{b})$$

C. $(m_1-1)c_1\Delta t < m_2c_2\Delta t < r \le m_1c_1\Delta t < (m_2+1)c_2\Delta t,\ m_2 > m_1$ (C.1)
$(m_1-1)c_1\Delta t < m_2c_2\Delta t < r \le (m_2+1)c_2\Delta t < m_1c_1\Delta t,\ m_2 > m_1$ (C.2)
または、$m_2c_2\Delta t < (m_1-1)c_1\Delta t < r \le (m_2+1)c_2\Delta t < m_1c_1\Delta t,\ m_2 > m_1$ (C.3) の時

$$\begin{aligned} T_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu}\Big[&\Lambda^{I}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{K}(\mathbf{x})\{-m_2u_i^{K;N-m_2-1} + (m_2+1)u_i^{K;N-m_2} + \kappa(m_1-1)u_i^{K;N-m_1} - \kappa m_1 u_i^{K;N-m_1+1}\} \\ &+\Lambda^{II}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{K}(\mathbf{x})\Delta t^2\{m_2^3u_i^{K;N-m_2-1} - (m_2^3+3m_2^2-3m_2+1)u_i^{K;N-m_2} \\ &+\sum_{m=m_1+1}^{m_2-1} 6mu_i^{K;N-m} + (-m_1^3+3m_1^2+3m_1+1)u_i^{K;N-m_1} + m_1^3u_i^{K;N-m_1+1}\} \\ &+\Lambda^{III}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{K}(\mathbf{x})\{m_2u_i^{K;N-m_2-1} - (m_2+1)u_i^{K;N-m_2}\}\Big] \end{aligned} \qquad (4.\mathrm{c})$$

ただし、 $\Lambda^{I}_{ik}(\mathbf{x},\xi) = \{\lambda n_i r_{,k} + \mu(\delta_{ik}\partial r/\partial n_x + n_i r_{,k} + n_k r_{,i} - 3r_{,i}r_{,k}\partial r/\partial n_x)\}/r^2$

$\Lambda^{II}_{ik}(\mathbf{x},\xi) = (\delta_{ik}\partial r/\partial n_x + n_i r_{,k} + n_k r_{,i} - 5r_{,i}r_{,k}\partial r/\partial n_x)/r^4$

$\Lambda^{III}_{ik}(\mathbf{x},\xi) = \{\lambda n_i r_{,k} + \mu(\delta_{ik}\partial r/\partial n_x + r_{,i}n_k)\}/r^2 \qquad \kappa = (c_2/c_1)^2,\ \lambda, \mu$ Lamé 定数

なお、T_{ik}と同様、U_{ik}も式(4)のように表すことができる。

4. 考察

さて、式(4)より次の事柄が明らかになる。T_{ik}において空間座標に関する項は $\Lambda^{\alpha}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{K}(\mathbf{x})$ $(\alpha = I \sim III)$ のみで、かつ、時間ステップには無関係である。また、時間に関する積分はない。従って、式(4)を式(1)、(2)に代入して積分方程式を離散化する時、必要な積分は空間積分 $\int_{\partial D}\Lambda^{\alpha}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{K}(\mathbf{x})dS_x$ のみとなりこれは時間ステップには無関係に評価できる。従って、従来、各ステップ毎に積分評価を行ってきた計算アルゴリズムは根本的に変更でき、Fig.1に示すようなアルゴリズムを構築できることになる。また、式(4.a)において m=1とすると

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)r^2}\{\mu n_i r_{,k} - \mu\delta_{ik}\partial r/\partial n_x - \mu n_k r_{,i} - 3(\lambda+\mu)r_{,i}r_{,k}\partial r/\partial n_x\}\phi^{K}(\mathbf{x})u_i^{K;N}$$
$$= T^{0}_{ik}(\mathbf{x},\xi)\phi^{K}(\mathbf{x})u_i^{K;N}$$

となり、積分核は静弾性問題の２重層核$T_{ik}{}^{0}$と一致する。従って、特異性の処理や自由項e_{ik}の評価は静弾性問題と全く同様に行えばよい。なお、具体的な数値計算結果は当日発表する。

参考文献
1) P.K.Banerjee, S.Ahmad and G.D.Manolis, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 14, 933-949, 1986.
2) D.L.Karabalis and D.E.Beskos, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 12, 73-93, 1984.
3) D.L.Karabalis and D.E.Beskos, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 56, 91-119, 1986.
4) 近江正徳、佐々木定雄、登坂宣好、構造工学論文集, 33B, 93-102, 1987.