I-86　ベクトル計算による境界要素法の高速化

京都大学　学生会員　○神谷泰範　　京都大学　正会員　西村直志　　京都大学　正会員　小林昭一

１．はじめに

本報告は、ＢＥＭ解法の高速化を目的とし、ベクトルプロセッサー VP-400 に適した計算アルゴリズムを開発、３次元静弾性問題の解析に適用して、その効果を確認したものである。

ベクトル計算を高効率化するためのアルゴリズムの鍵は、最も内側のＤＯループをいかに大きく取るかということである。ここで開発したアルゴリズムの要点は、はじめに評価点を固定して積分を行うという従来の発想を全面的に転換して、Gauss 点を固定して積分を行うようにした点である。[1)]

２．積分方程式と数値計算法

本報では、３次元静弾性外部第２種問題を例題として考えた。その場合には、無限遠点での応力に対応する無限遠点での変位を $u_i{}^0$ とすると、解くべき積分方程式は次のように与えられる。

$$c_{ik}u_k = u_i{}^0 - \int_S W_{ik}u_k ds \tag{1}$$

なお式(1) の右辺第２項は２重層ポテンシャルであり、W_{ik}は第２基本解である。このように表現された積分方程式を離散化して数値的に解くために、ここでは境界の形状及び境界上の関数を２次のアイソパラメトリック要素を用いて近似した上で、４×４点の Gauss積分を用いて数値積分を行った。境界上の任意の要素を考えて、その中に適当に選点を選び、その座標を $\mathbf{x}$ とする。一方、その要素上の任意の点を局所座標$(o;\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ を用いて表す。（なおξ_3 は、その要素の外向き放線ベクトルを向く。）いま、座標 x_i及び関数$u_i(\mathbf{x})$ を局所座標$\boldsymbol{\xi}$に関する補間関数Nを用いて次のように表す。

$$x_i(\boldsymbol{\xi})=\sum_{h=1}^{8}N^h(\boldsymbol{\xi})x_i{}^h \quad , \quad u_i(\boldsymbol{\xi})=\sum_{h=1}^{8}N^h(\boldsymbol{\xi})u_i{}^h \tag{2}$$

(2)式を(1)式に代入し、さらに Gauss積分を用いて得られる方程式を解けば数値解を求めることができる。（特異積分は別に評価する必要がある。）

３．計算アルゴリズム

２章で述べられている方程式を解くためには、係数行列

$$K(n(\mathbf{y})_k,\ n(h(e))_i)= \sum_{l=1}^{4}\sum_{m=1}^{4}W_{ik}(\mathbf{y},\mathbf{x}_{(e)}(\xi_1{}^l,\xi_2{}^m))N^h(\xi_1{}^l,\xi_2{}^m)w_l w_m J_{(e)}(\boldsymbol{\xi}) \tag{3}$$

を求める必要がある。ここに、$J_{(e)}$ は要素ｅに関する Jacobian、$x_{(e)}$は要素ｅ上の選点、w_l，w_mはξ_1軸，ξ_2軸方向の数値積分の重みである。また$n(\mathbf{y})$ は評価点$\mathbf{y}$の節点番号を、$n(h(e))$は要素ｅの要素内節点番号h の点に相当する節点番号を、添字ｋ，ｉはそれぞれ３次元の３方向示すものである。係数行列Kを求めるために従来用いられている計算アルゴリズムは、はじめに評価点を、次に要素を決め、方向及び要素内節点に関して独立にその要素内の Gauss点に対して積分を行い和を計算し、適当な行列成分にその値を加えるというものである。以上を式で表すとすれば次のようになる。

$$\underset{n(\mathbf{y})=1}{\overset{M}{\mathrm{DO}}}\ \underset{e=1}{\overset{N}{\mathrm{DO}}}\ \underset{k=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}\ \underset{i=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}\ \underset{h=1}{\overset{8}{\mathrm{DO}}}\ \sum_{l=1}^{4}\sum_{m=1}^{4} W_{ik}(\mathbf{y},\mathbf{x}_{(e)}(\xi_1{}^l,\xi_2{}^m))N^h(\xi_1{}^l,\xi_2{}^m)w_l w_m J_{(e)}(\boldsymbol{\xi}) \tag{4}$$

ここに$\underset{n(\mathbf{y})=1,}{\overset{M}{\mathrm{DO}}}\ \underset{k=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}$ は行列の中の適当な行成分$n(\mathbf{y})_k$に値を代入していく作業を $\underset{e=1,}{\overset{N}{\mathrm{DO}}}\ \underset{i=1,}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}\ \underset{h=1}{\overset{8}{\mathrm{DO}}}$ は適当な列成分$n(h(e))_i$ に値を代入していく作業を表している。このような計算アルゴリズムを「節点固定型

のアルゴリズム (Node-wise Algorithm)」と呼ぶこととする。

ベクトル計算を高効率化するためのアルゴリズムの鍵は、最も内側のＤＯループをいかに大きくとるかということである。そのためには、(4) 式のような計算方法では最も内側のＤＯループの反復回数が４となり効率が悪い。そこで、次のような計算アルゴリズムを考える。はじめにGauss点 を、次に要素を決め、評価点を決める。方向及び要素内節点に関して独立に積分を行い、適当な行列成分にその値を加える。以上を式で表すとすれば次のようになる。

$$\sum_{l=1}^{4}\sum_{m=1}^{4}\mathop{\mathrm{DO}}_{e=1}^{N}\mathop{\mathrm{DO}}_{n(y)=1}^{M}\mathop{\mathrm{DO}}_{k=1}^{3}\mathop{\mathrm{DO}}_{i=1}^{3}\mathop{\mathrm{DO}}_{h=1}^{8} W_{ik}(y, x_{(e)}(\xi_1{}^{l}, \xi_2{}^{m}))N^{h}(\xi_1{}^{l}, \xi_2{}^{m})w_l w_m J_{(e)}(\xi) \tag{5}$$

ここで内側の３つのＤＯループは反復回数が少ないので展開すると、最も内側のＤＯループの反復回数は節点数となり大きくなるので効率が良くなる。このような計算アルゴリズムを「ガウス点固定型のアルゴリズム (Gauss-Point-wise Algorithm) 」と呼ぶこととする。

４．適用例

Gauss 点固定型の計算アルゴリズムを用いて、ベクトルプロセッサー vp-400 を用いて計算を行ったところ要した計算時間を、他の様々な方法による場合と比較して、表１及び図１に示しておく。

表１　行列作成までの計算時間

節点数	節点固定型アルゴリズムによる計算プログラム（Type A）		ガウス点固定型アルゴリズムによる計算プログラム（Type B）	
	スカラー計算機	ベクトル計算機	スカラー計算機	ベクトル計算機
９５	１８．２ Sec（１９．６）	７．１ Sec（７．３）	５．８ Sec（７．５）	１．５ Sec（１．７）
２３７	１３３．７ Sec（１６１．１）	６３．３ Sec（６４．８）	２８．９ Sec（５９．５）	４．６ Sec（５．４）
３８６	――― ―――	――― ―――	７４．１ Sec（２２８．８）	９．６ Sec（１２．０）

（　）内は変位までの計算時間

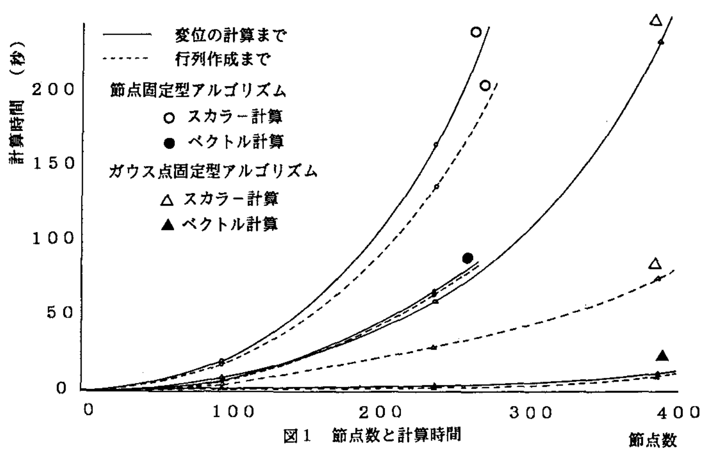

図１　節点数と計算時間

５．おわりに

以上の結果からわかるように、節点固定型のアルゴリズムによる計算プログラムをスカラー計算機を用いて計算した場合、その計算時間は節点数に対してその３乗のオーダーで増加するのに対し、ガウス点固定型のアルゴリズムによる計算プログラムをベクトル計算機を用いて計算した場合、その計算時間は節点数にほぼ比例して増加するにとどまっている。また節点固定型のアルゴリズムによる計算プログラムをベクトル計算機を用いて計算した場合よりも、ガウス点固定型のアルゴリズムによる計算プログラムをベクトル計算機を用いて計算した場合の方が、はるかに効率化されていることがわかる。

参考文献

１）神谷，西村，小林：ベクトル化計算によるＢＥＭの高効率化とその弾性問題への適用，境界要素法論文集第５巻，pp.81-84，1988.