I-84　不飽和浸透流と地盤変形の連成系の数値解析法

東京工業大学　正員　依知川　哲治
東京工業大学　正員　吉田　　裕
東京工業大学　　　　汪　　　易森

1．はじめに

Biotの多次元圧密方程式系を基礎として、その連続条件を不飽和状態をも取り扱えるように拡張する事により、不飽和浸透流問題を地盤変形との連成のもとに有限要素法により解こうとする研究はこれまでにも報告がなされている。これらの研究のおいて、基礎方程式から解法の構成に至る方程式の取り扱いは、基本的には圧密問題において展開されてきた解法に従って行われているのがほとんどであり、この部分に焦点を当てた研究はあまり行われていない。不飽和浸透問題の場合、不飽和領域における材料特性の問題と共に外水位や土中の自由水面の変動に伴う境界条件の修正をどのように扱うかという問題があり、特に後者は基礎方程式の取り扱いと解法の構成という点に密接に関連する問題である。これらの点を踏まえ、不飽和浸透流と地盤変形の連成する問題を対象として有限要素法により構成した解析法について報告するものである。

2．基礎方程式

地盤変形と不飽和浸透流れの連成系の支配方程式および境界条件は次のように書き表すことができる。

力の釣り合い式：$\left(\frac{1}{2}D_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k}) - \chi p \delta_{ij}\right)_{,j} + \rho b_i = 0$　(1)

Darcy則：$R_{ij}q_j + p_{,j} - \rho_w b_i = 0$　(2)

連続条件式：$q_{i,i} = -\frac{c}{\gamma_w}\dot{p} - S_r \dot{u}_{i,i}$　(3)

u_i：土骨格の変位
p　：間隙水圧
q_i：流速
γ_w：水の単位体積重量
ρb_i、$\rho_w b_i$：Body Force

境界条件

(1)に対し：$\sigma_{ij}n_j=\bar{t}_i$ on Γ_t、$u=\bar{u}$ on Γ_u　(4)　但し、$\Gamma_t\cap\Gamma_u=0$、$\Gamma_t\cup\Gamma_u=\Gamma$

(2)に対し：$p=\bar{p}$ on Γ_p、　$q_i=\bar{q}_i$ on Γ_q　(5)　$\Gamma_p\cap\Gamma_q=0$、$\Gamma_p\cup\Gamma_q=\Gamma$（$\Gamma$は全境界）

ここに、R_{ij}は透水抵抗に関するテンソル、cは比水分容量、S_rは飽和度であるが、いずれも不飽和領域においては一定ではなく、圧力の関数として表すことができる。

3．解析法の構成

Biotの圧密方程式系を対象とした解法では、そのほとんどにおいて力の釣り合い式(1)と、式(2)、(3)より流速を消去して得られる微分方程式を対象として離散化が行われている。その結果、圧力の空間に関する２階微分を対象とすることとなるため圧力は節点変数として導入する必要があり、また変位の補間には２次以上の関数が用いられるのが通常である。

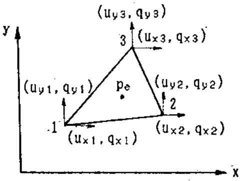

図１　補間関数

本研究では有限要素方程式の誘導に際しては、微分方程式の段階での流速の消去は行わずに、方程式(1)、(2)、(3)に対して、それぞれ変位分布、流速分布、間隙水圧分布を重み関数として重み付き残差式を誘導し、空間に関する離散化を行った。このような定式化をとることにより、補間関数としては、図１に示すように、変位、流速に関しては要素内線形変化、圧力要素内一定の三角形要素という低次の組合せが可能となっている。紙面の都合上、積分漸化式の誘導の詳細については文献[2]と重複するので省略するが、時間積分公式の適用により、得られる時刻t_nからt_{n+1}（$=t_n+\Delta t$）への積分漸化式は次のような関係式である。

$$\begin{bmatrix} \alpha K & 0 & -\alpha K_p S \\ 0 & \alpha M & -\alpha K_p \\ \Delta t^{-1} T K_p & \alpha K_p & \Delta t^{-1} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{n+1} \\ q^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta K & 0 & \beta K_p S \\ 0 & -\beta M & \beta K_p \\ \Delta t^{-1} T K_p & -\beta K_p & \Delta t^{-1} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{n} \\ q^{n} \\ p^{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F - K\bar{u} \\ Q - M\bar{q} \\ T K_p \bar{u} - K_p \bar{q} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに、uは節点変位、qは節点流速、pは要素重心での圧力のベクトルで、Kは剛性、Mは透水性、K_pは

空間の勾配に関する係数行列である。F、Qは外力のベクトルであり、上に－を付けたのは境界での既知量である事を示す。α、βはCrank Nicolson法ではいずれも1/2である。 また、C、T、Sは不飽和状態における材料特性に関する係数で、それぞれ水の貯流係数(c)、飽和度(Sr)、 および不飽和状態での力の釣り合いに関するパラメータ(χ)によって表される係数行列である。

式(6)を繰り返し解くに当たり、 係数行列M、S、T、Cはいずれも圧力の関数であるが、ここでは、積分時間間隔をある程度小さくとることを前提に、時刻t_nにおける圧力によって評価するものとした。解析に用いた不飽和時における材料特性の変化を図2に示す。

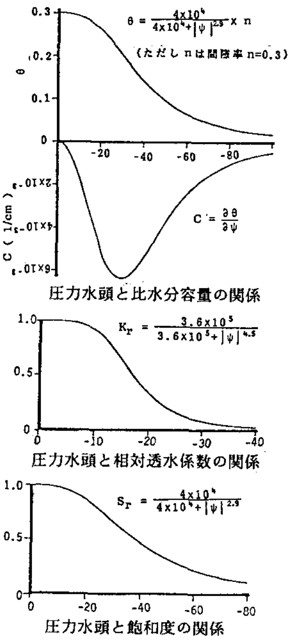

図2 材料特性

4．境界条件の修正について

不飽和浸透流問題においては外水位や土中の自由水面の変化により、境界条件も流速規定境界から圧力規定境界へ、あるいはその逆へといった境界条件の修正が必要となる。図3に示すような水面降下の問題を例にとると外水位が下がった後に、土表面において浸潤面が形成されるが、圧力を節点変数にとった場合には土表面の圧力が0に固定されるために、土中の自由水面の変化に伴って圧力規定境界から流速規定境界に修正するためには浸潤面近傍の節点の圧力の値をもとにしてその勾配を評価し直すなどの特別の手だてが必要となる。本研究では基本変数として流速を導入し、圧力は要素内の変数としているため、この問題に直接対応することができる。ここでは、浸潤面での法線方向流速が流出から流入に変化した場合に境界条件の修正を行うものとした。

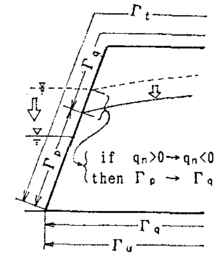
図3 境界条件の修正

5．数値解析例

図4に示すような長さ600cm,高さ200cmの矩形堤体の両側の水位が一気に145cmから75cmに降下したという問題を対象として解析を行った。表1に解析に用いた材料定数等をまとめて示す。解析は対象性を考慮して左半分の領域に対して行った。図5は時刻を追っての提体内の自由水面の変化状況を示したものである。図6にいくつかの時刻における間隙水圧の等圧線図と流速ベクトル図を示した。

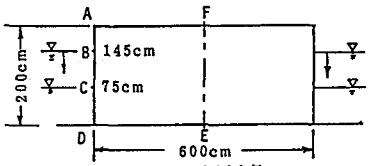

図4 解析対象

表1 材料定数等

透水係数	飽和	1.1×10^{-2} (cm/sec)
	不飽和	$1.1\times10^{-2}\times K_r$ (cm/sec)
体積弾性係数		1200.0 (kgf/cm^2)
せん断弾性係数		461.5 (kgf/cm^2)

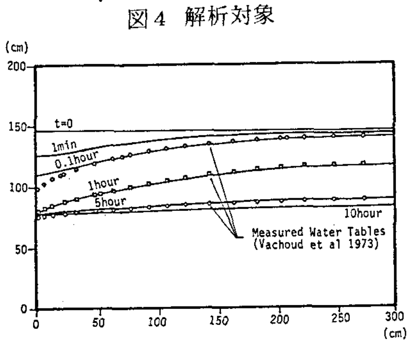

図5 自由水面の変化状況

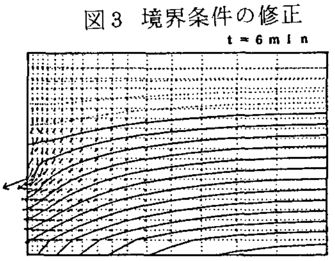
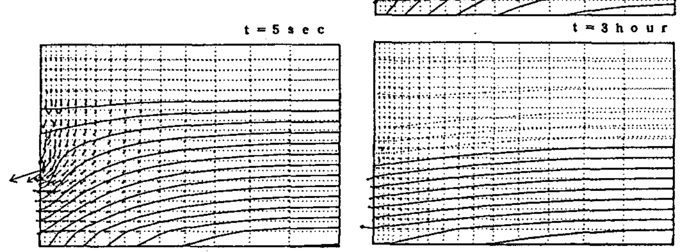

図6 間隙水圧の等圧線図と流速ベクトル図

参考文献

1)大西他、土木学会論文集、第298号、1980年6月　2)吉田他、構造工学論文集、vol.35A、1989年3月

3)Vauclin, M. et. al.: Modeling and simulation of water resources systems, North Holland Publishing Co.,1975