

I-82

光弾性応力解析とその有限変形問題について

(株) 北日本ソイル研究所 正員 中村作太郎

1. まえがき

材料力学, 構造力学, 弾塑性学等の発達史をみると、最近では従来の理論偏重から応力現象を重視する実験応力解析に移行しつつあるように思われる。しかし、史の変遷をつぶさに調べてみると、理論と実験は交互に発達し、一波形を示しながら科学技術の進歩とともに進展している。最近電子計算技術の著しい進歩により、従来不可能とされていた複雑な計算も短時間で処理出来るようになったし、構造力学の進歩によるマトリックス解法や有限要素法(FEM)により、各種構造物の三次元解析等が容易に出来るようになった。このことは、理論計算手法の発達を促し、理論解析の全面的発達に拍車をかける結果ともなった。

しかし、これで満足出来るわけではなく、現象追求により、よりよい理論を開発して行かなければならないことは、いまもむかしも変りはないのである。

実験応力解析には、弾塑性問題、応力集中問題、三次元応力問題等の高度の現象解析追求課題が潜んでおり、これらを解明するには、光弾性実験解析による内部応力現象の追求が絶対に必要となつて来ると思われる。特に、凍結法による三次元光弾性応力解析では、かなり大きな変形をも許容した実験条件の基で行なわれるから、有限変形弾・塑性体としての変位、変形の解析研究が必要と考えられる。

2. 各種の応力測定法^{1),2)}

元来、実験応力解析には、1) 数学的の応力解析を行なう前に踏査的に行なう予備の実験解析、2) 数学的の応力解析の後に行なう確認的の実験解析、3) 実験公式を作るため、またはデータのみ得るための実験解析、4) 計算の代りとして行なう実験解析等に分けることが出来る。これらの実験解析では、モデルを造つて実験し、理論計算値と比較するのが普通である。

現在用いられている測定方法を列記すれば、次のとおりである。

(1) Mechanical Properties of Materials、(2) Testing Machines、(3) Mechanical Gages and Extensometers、(4) Optical Method of Strain Measurement、(5) Electrical—Resistance Gages and Circuit Theory、(6) Electric—Inductance Gages、(7) Electric—Capacitance Gages、(8) Strain Rosettes、(9) Motion Measurement、(10) Working Stresses、(11) Residual Stresses、(12) Methods of Crack Detection、(13) Interpretation of Service Fractures、(14) Brittle Coatings、(15) Structural Model Analysis、(16) Analogies、(17) Application of Holography、(18) X—Ray Analysis、(19) Super—sonic Method、(20) Photoelasticity、(21) Moire Method。

このほか、実物構造物の応力測定も、現場において広く行なわれているが、これらの中で、特異なものとして、光弾性学(Photoelasticity)の実験解析を挙げることが出来る。光弾性実験解析は、重要視されつつある有限弾塑性体の応力理論の追求上、きわめて役立つものと考えられる。

3. 有限変形弾性体の基礎理論^{3),4)}

等方性完全弾性体において、無ひずみ状態すなわち、変形前の局時点 $t=0$ をとり、局時座標 X^I 、計量テンソル G_{IJ} 、 G^{IJ} 、基本ベクトル R_I 、 R^I とする。また、変形状態の随時点 t において、随時座標 x_i をとり、計量テンソルと基本ベクトルを g_{ij} 、 g^{ij} および r_i 、 r^i とする。

基本式は、コーシーの変形テンソル R を用いて、(1), (2) 式によつて示される。

$$c_{ij}(x, t) = G_{IJ} X_I^i X_J^j, \quad c_{ij}^{-1}(x, t) = G_{IJ} x_i^I x_j^J \quad (1)$$

$$c_{ij} = \delta^{IJ} X_I^i X_J^j, \quad c_{ij}^{-1} = \delta^{IJ} x_i^I x_j^J \quad (2)$$

応力-ひずみ公式には、フインガー の式を用い、(3), (4) 式が得られる。

$$\text{圧縮性のとき、} \quad \sigma_{ij}^i = \frac{2}{\sqrt{\text{III}_c}} \left[\left(\text{II}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} + \text{III}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_c} \right) \delta_{ij}^i + \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c} c_{ij}^{-1} - \text{III}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_c} c_{ij}^i \right] \quad (3)$$

$$\text{非圧縮性のとき、} \quad \sigma_{ij}^i = -p \delta_{ij}^i + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c} c_{ij}^{-1} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_c} c_{ij}^i \quad (4)$$

(3), (4) 式については、次の (5) の条件式を満足しなければならない。また、平衡式には (6) の運動方程式を用いばよい。

$$\begin{aligned} \text{なお、(1), (2) 式は、} \quad & \lambda_r \neq \lambda_s, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c} + \lambda_t^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} > 0 \quad (r \neq s \neq t) \\ & \lambda_r = \lambda_s, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c} + \lambda_t^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} \geq 0 \quad (r \neq s \neq t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\rho \dot{c}_{ij}^i + \rho F^i = f^i \quad (6)$$

4. 光弾性応力解析について²⁾

各種の応力測定の中で、光弾性実験とその解析は、特異の存在であつて、他の追従を許さないものがある。その秀でた特色を列記すれば、次のとおりである。

- 1) 表面応力だけでなく、内部応力をも克明に解析出来る。
- 2) 応力集中現象を詳細に解明し得る。
- 3) 微小変形のみならず、有限変形の現象をも解明出来、弾・塑性問題に広く応用出来る。
- 4) 三次元弾性体の複雑な模型の実験応力解析も可能である。
- 5) 光弾性実験応力解析により、有限弾性変形理論の追求が可能である。

また、有限弾性理論の展開には、立体微分幾何学およびマトリックス、ベクトル、テンソル等の数学的ならびに力学的表示法が盛んに用いられるようになった。これらの新しい表示法は、光弾性応力解析の理論的吟味とその応用に対し、きわめて有力な武器になるものと思う。なお、光弾性実験とその解析における先端技術には、有限要素法との比較、複合材の光弾性的研究、アイソダイン光弾性法、破壊力学との関連、応力拡大係数の研究、光弾性縞による応力分布の解析、応力凍結法による実験解析、動的な光弾性実験とその解析、散乱光弾性の実験とその応用、光弾性被膜法とひずみの研究等がある。

5. あとがき

上述のような光弾性法の特長を十二分に発揮するには、モデルの有限変形問題につき、実験、理論ともども吟味研究しなければならない。すなわち、光弾性法では、微小変形弾性体のみならず、有限変形弾塑性体の表面および内部の応力現象を厳密に追求する目的のあることを再認識し、厳密解析理論の難解な問題をも辞せず、積極的に研究すべきであろう。

なお、本研究を取りまとめるに当り、下記文献に負うところ大きく、各文献の著者に対し、心から感謝の意を表する次第である。

文 献

- 1) 成岡昌夫：構造力学要論，丸善(株) 301 (1974)。
- 2) 応力測定技術研究会：応力測定法，朝倉書店 1 (1955)。
- 3) 玉手統：弾性体の変形，コロナ社 40 (1973)。
- 4) 横道英雄：弾・塑性新論，技報堂 81 (1979)。