

福島工業高等専門学校 正員 根岸嘉和
山梨大学工学部 正員 平島健一

① 緒言 本報告においては、混合仮定型に属する動的な一般化高次平板理論を、3種の異なった定式化手法に基づいて構築し、それらの理論特性を相互に比較しつつ明かに示すとともに、数値例を通じて精度の検証を行い、一般化高次平板理論の構築における代表的な3系列の手法に基づく動的理论の特性について検討する。

② 理論式の誘導

Fig. 1 に示す平板の動的挙動の支配式を、以前提案した3系列の手法^{1)~3)}に従い、ここでは上下表面の自由境界条件($\bar{\sigma}_{ij}^{\pm} = 0$)を満足する混合仮定型の一般化高次理論として定式化する。

① 断面積分型理論（断面量理論）：Gn-理論
変位 U_j と面外応力 σ_{zj} を板厚座標 ξ ($\xi = z/c$)のルジャンドル多項式 $P_m(\xi)$ とその一回積分型の多項式 $R_m(\xi)$ で展開仮定し、混合型の変分原理を用いて定式化した、運動方程式ならびに面外ひずみの幾何-構成関係式の重み付き断面積分式を支配式とする理論。

基本仮定：

$$u_{\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\xi) u_{\alpha(m)}(x, y, t)$$

$$u_z = u_{z0} + \sum_{m=0}^{\infty} R_m(\xi) u_{z(m)}(x, y, t)$$

$$\sigma_{zj} = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(\xi) \sigma_{zj(m)}(x, y, t) \cdots \cdots (1)$$

支配方程式：

$$\int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} \{ \sigma_{\alpha\beta, \beta} + \sigma'_{\alpha z} = \rho \ddot{u}_{\alpha} \} P_n(\xi), \\ \{ \sigma_{z\beta, \beta} + \sigma'_{zz} = \rho \ddot{u}_z \} 1, \\ \{ \sigma_{z\beta, \beta} + \sigma'_{zz} = \rho \ddot{u}_z \} R_n(\xi), \\ \{ \tau_{\alpha z} / G = (u'_{\alpha} - u_{z, \alpha}) \} R_n(\xi), \\ \{ (\sigma_{zz} - \nu \sigma_{\beta\beta}) / E = u'_{zz} \} R_n(\xi). \end{array} \right\} d\xi \cdots \cdots (2)$$

ここに、 $(\cdot)$ 付き添字は x or y による微分、 $(\cdot)'$ は z 、 $(\cdot)''$ は時間 t による微分をそれぞれ表す。 $\alpha, \beta = x, y$ 、 $j = x, y, z$ とし総和規約適用。 $\sigma_{\alpha\beta}$ は σ_{zz} と U_{α} で表した面内応力、 E, G, ν, ρ は材料定数。

② 非積分型理論（微小点量理論）：Mn-理論
変位と面外応力のべき級数展開を用い、動弾性学の基礎式を、直接、面外座標 z のべき次数ごとに区分化した式、ならびに上下表面の境界条件式を支配式とする。

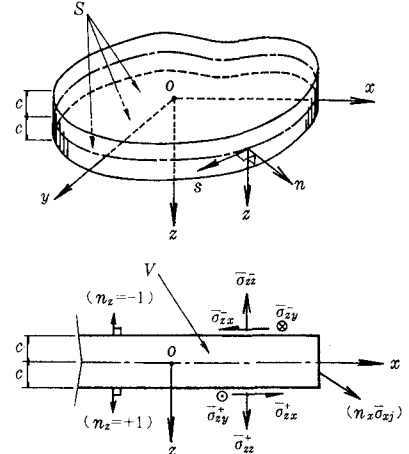


Fig.1 Geometry of homogeneous isotropic plate.

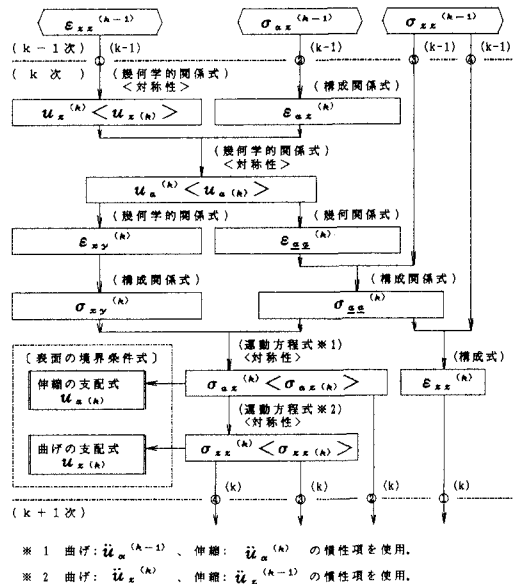


Fig.2 Flow chart for deduction of successive approximation (Sn)-theory.

基本仮定：

$$u_j = \sum_{m=0}^{\infty} z^m u_{j(m)}(x, y, t)$$

$$\sigma_{xz} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sigma_{xz(m)}(x, y, t) \quad \dots \dots \dots (3)$$

支配方程式：

$$(m+1) \sigma_{\alpha z(m+1)} = \{ \sigma_{\alpha \beta(m)}, \beta - \rho \ddot{u}_{\alpha(m)} \}$$

$$(m+1) \sigma_{zz(m+1)} = \{ \sigma_{z \beta(m)}, \beta - \rho \ddot{u}_{z(m)} \}$$

$$(m+1) u_{\alpha(m+1)} = \{ u_{z(m)}, \alpha - \sigma_{\alpha z(m)} / G \}$$

$$(m+1) u_{z(m+1)} = \{ \sigma_{zz(m)} - \nu \sigma_{\beta \beta(m)} \} / E$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\pm c)^m \sigma_{zj(m)} = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

③ 逐次近似型理論（逐次求積理論）：Sn-理論
定式化の出発点における初期値を下記のように置き、
Fig. 2 に示す流れに従って連鎖的に各成分を求める手法により、動弾性学の基礎式を、逐次高次の関係式まで満足させた理論。

基本仮定（初期値）：

$$\varepsilon_{zz(0)} = 0, \quad \sigma_{zj(0)} = 0;$$

$$(u_j^{(0)} = 0) \quad \dots \dots \dots (5)$$

支配方程式：

$$\frac{2Ec^3}{3(1-\nu^2)} \nabla^4 u_{z0} = 2c\rho \sum_{k=1}^n I_{(k)}$$

$$I_{(1)} = \ddot{u}_{z0}$$

$$I_{(2)} = -(17-7\nu)/15(1-\nu) \nabla^2 \ddot{u}_{z0}$$

$$I_{(3)} = \frac{(1+\nu)(422-424\nu-33\nu^2)\rho}{525(1-\nu)E} \ddot{u}_{z0}$$

$$\dots \dots \dots (6)$$

各理論の特性を第n次近似理論による平板の曲げ自由振動解析の場合について比較すると次表のようになる。

理論	変位の次数		応力の次数		固有値の数	類型理論
	U_z	U_α	$\sigma_{\alpha z}$	σ_{zz}		
Gn	2n-2	2n-1	2n	2n+1	3n	Murakami ⁴⁾
Mn	2n	2n+1	2n	2n+1	3n+1	Vlasov ⁵⁾
Sn	2n-2	2n-1	2n	2n+1	δ_{n1+n-1}	Niordson ⁶⁾

③ 数値計算例 これらの各次数の理論を用い、無限板中を伝播する平面調和波（波数k、位相速度c）の分散解析を行った結果をFig. 3—Fig. 5に示す。

以上より、Gn理論の工学的有効性が指摘できる。

参考文献 1) 根岸：土木学会東北支部発表会概要，pp.16-17，1988. 2) 根岸・吉沢：土木学会東北支部発表会概要，pp.15-16，1986. 3) 根岸・平島：土木学会第42回年次講演会概要，pp.38-39，1987. 4) Murakami, H. : J. Appl. Mech. Vol.53, pp.661-666, 1986. 5) Vlasov, V. Z. : Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Vol.6, pp.321-330, 1956. 6) Niordson : Int. J. Solids Struct., Vol.15, pp.167-181, 1979.

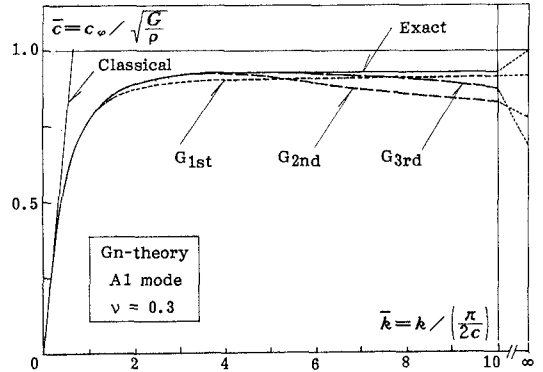


Fig. 3 Phase velocity $\bar{c}$ versus $\bar{k}$ for 1st antisymmetric mode by Gn-theory.

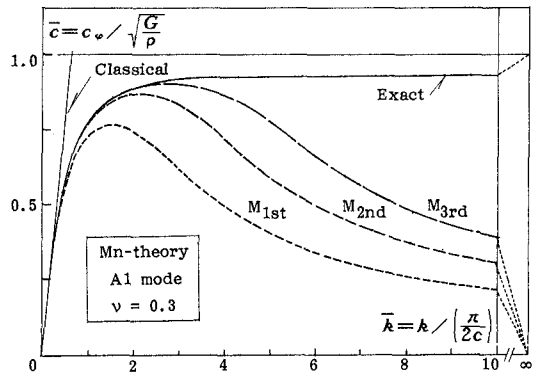


Fig. 4 Phase velocity $\bar{c}$ versus $\bar{k}$ for 1st antisymmetric mode by Mn-theory.

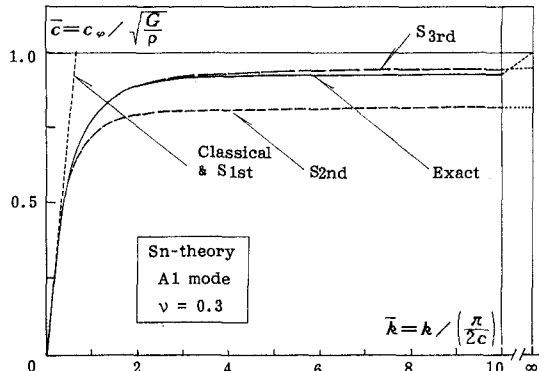


Fig. 5 Phase velocity $\bar{c}$ versus $\bar{k}$ for 1st antisymmetric mode by Sn-theory.