

東海大学海洋学部 学生員 樋江井 夕紀夫

東海大学海洋学部 正員 北原 道弘

1. はじめに

3次元無限弾性体中に近接して存在する欠陥群を想定し、複数の空洞による弾性波の散乱問題を考える。この問題の解法として、ここではボルン級数型積分方程式法¹⁾を応用する。解析上は、2つの球形空洞による散乱問題を設定し、本解法の収束性を平面P、S波入射の場合について検討する。

2. ボルン型解法による散乱問題の定式化

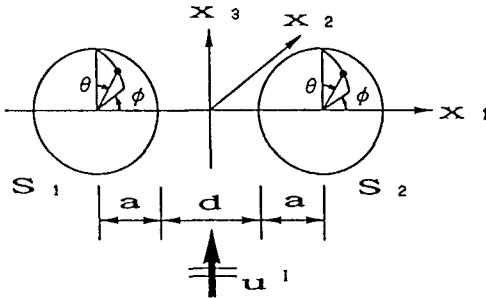


Fig. 1 Scattering model

Fig. 1 に示すような2つの空洞モデルを考える。各空洞表面 S_1, S_2 上の境界条件は、表面力が零： $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ である。このとき、離散化した後の弾性母体に対する境界積分方程式は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^I \\ \mathbf{u}_2^I \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{u}^I$ は入射波であり、 $\mathbf{u}_i$ は各空洞表面上の変位である。また、2重層マトリクス $\mathbf{H}_{ij}$ の下添字は j 番目の空洞表面から i 番目の空洞表面への影響を意味する。すなわち、 $\mathbf{H}_{11}$ と $\mathbf{H}_{22}$ は各空洞の自己影響を、 $\mathbf{H}_{12}$ と $\mathbf{H}_{21}$ は空洞間の相互影響を表す。

ここで、ボルン級数による解法を適用するために式(1)の係数マトリクス $\mathbf{H}$ を対角項と非対角項に分離して、次式を得る。

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{u} = \mathbf{u}^I \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ などは次のようである。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{H}_{12} \\ -\mathbf{H}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}^T, \mathbf{u}^I = \{\mathbf{u}_1^I, \mathbf{u}_2^I\}^T$$

ここで、式(2)の両辺に $\mathbf{A}$ の逆マトリクス $\mathbf{A}^{-1}$ を作用させて、次式を得る。

$$(\mathbf{I} - \mathbf{C}) \mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{C}$ は次のようである。

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{H}_{12} \\ -\mathbf{H}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5)$$

マトリクス $\mathbf{C}$ に対して、

$$\|\mathbf{C}\| = \frac{\|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A}\|} < 1 \quad (6)$$

が成り立てば、式(4)より解 $\mathbf{u}$ は次のように求められる。

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}^I$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}^n \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}^I \quad (7)$$

これが解 $\mathbf{u}$ のボルン級数的表現である。ここで、この級数の第1項を解 $\mathbf{u}$ の第0次近似として、次のように置く。

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}^I \quad (8)$$

また、第1, 第2次近似は、以下のようになる。

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \mathbf{C} \mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_0 + \mathbf{C} \mathbf{u}_0 + \mathbf{C}^2 \mathbf{u}_0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

3. 解析モデル

実際の数値解析では、Fig. 1 に示すように、大きな等しい球形の空洞が x_1 軸上に並列に存在する場合を考え、入射波は x_3 軸に沿って鉛直下方から

入射するものと仮定した。なお、空洞間の距離 d は空洞の半径 a に対して $d = a/5$ に設定した。解析上の空洞表面は、1 個の球につき56の四角形要素で近似しており、一定要素を用いている。

また、座標系も Fig. 1 のように定義している。すなわち、球座標 θ は各球の北極 (x_3 軸方向) から計られた角度であり、 ϕ は x_1-x_2 平面内の x_1 軸方向から計られた角度である。

4. 数値解析例

Fig. 2 と Fig. 3 は 2 個の空洞に P 波が入射した場合について、式 (7) の収束性を変形レベルで確認し

たものであり、それぞれ左側空洞上の変位の極座標成分 $|u_r|$ と $|u_\theta|$ を描いたものである。同様に、Fig. 4 と Fig. 5 は S 波が入射した場合の $|u_r|$ と $|u_\theta|$ をそれぞれ示している。図中の —— は、式 (1) の積分方程式系を直接解いた結果である。また、----- はボルン級数の第 0 次近似であり、----- が第 1 次近似、----- が第 2 次近似である。

参考文献 1) 樋江井・北原；面外多重散乱問題における Born 級数の収束性について，土木学会第43回年次学術講演会講演概要集，I-1，1988年。

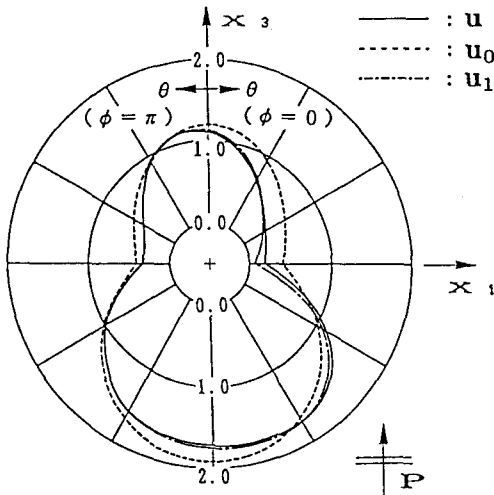


Fig. 2 $|u_r|$ for double cavities at $ak_L=1.0$

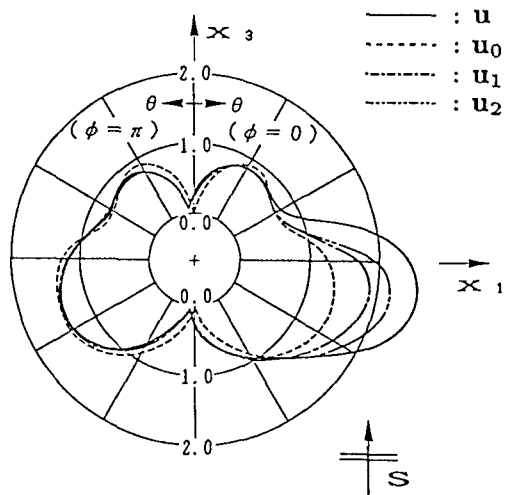


Fig. 4 $|u_r|$ for double cavities at $ak_T=1.0$

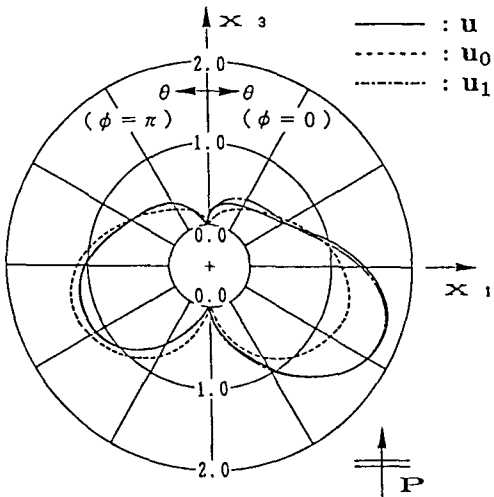


Fig. 3 $|u_\theta|$ for double cavities at $ak_L=1.0$

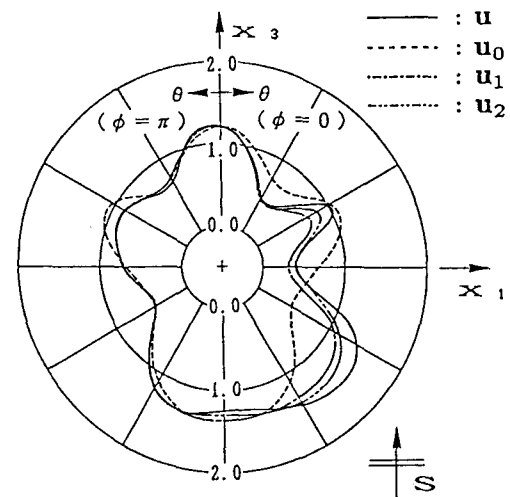


Fig. 5 $|u_\theta|$ for double cavities at $ak_T=1.0$