

I-76

面内状態下の楕円形弾性Inclusion 問題の解析解

山梨大学工学部 正員 平島 健一

山梨大学工学部 正員 川上哲太郎

玉野総合コンサルタント 正員 長谷川 武

1. まえがき

平面応力ないし平面ひずみ状態で、領域の有限位置に集中力、集中偶力、点転位等が作用した場合の等方性弾性体内に存在する一般の楕円形Inclusion 問題の解析は、Inclusion の力学特性 ($0 \leq \Gamma = G_2/G_1 \leq \infty$)、および幾何形状特性 ($0 \leq m(a-b)/(a+b) \leq 1$) を特殊な値にすることによって工学的に重要な各種の場合の問題となる。ここに、 G_1, G_2 はそれぞれMatrix, Inclusionのせん断弾性係数、 a, b は楕円形Inclusion の長半径、短半径である。しかし、この一般の場合はまた、現実的にも存在する楕円形弾性Inclusion を有する問題への興味ある適用といった面でも極めて重要な研究課題である。しかるに、従来までの研究では、上述のうち特殊化したもの（すなわち、 $\Gamma=0$, $\Gamma=\infty$, $m=0$ あるいは $m=1$ ）についての厳密解ないし近似解が与えられているに過ぎなかったが、ここではこれらを全て包含した一般の場合についての解析解を求めた結果について報告する。

2. 定式化の過程

楕円形の弾性Inclusion を有する等方性無限板を考える。Fig.1 (a) のようにMatrixとInclusion の楕円形境界を L とし、写像関数を次のように定義する。

$$z = x + iy = \omega(\zeta) = R_0 \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad R_0 = (a+b)/2 \quad \dots (1)$$

この写像関数の ζ -平面上 (Fig.1(b)) では、境界 L が単位円 (i.e. $|\zeta| = |\sigma| = 1$) に、また、 x 軸上の共焦点間の位置が半径 $\sqrt{m}$ の円にそれぞれ対応する。なお、 $|\sigma| = 1$ の円境界では鏡像原理によって、 $\zeta = 1/\bar{\zeta}$ が成立する。Matrix (領域1) とInclusion (領域2) の x, y 方向変位を u_k, v_k ($k=1, 2$) ; 任意の曲線に沿う x, y 方向の合応力を P_k, Q_k とすれば、これらの量は複素解析関数 $\Phi_k(\zeta)$, $\Psi_k(\zeta)$ を用いて次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_k + iv_k &= \frac{1}{2G_k} [k_k \Phi_k(\zeta) - X_k(\zeta)] \quad , \quad -Q_k + iP_k = \Phi_k(\zeta) + X_k(\zeta) \quad , \\ X_k(\zeta) &= \omega(\zeta) \overline{\Phi_k(\zeta)} + \overline{\Psi_k(\zeta)} = \omega(\zeta) \overline{\Phi_k(1/\bar{\zeta})} + \overline{\Psi_k(1/\bar{\zeta})} \quad . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

さて、境界 L でMatrixとInclusion が完全に連続している場合には、上式の変位、合応力が両側の境界 $L^\pm$ で等しくなる必要がある。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} [-Q_1 + iP_1]^+ - [-Q_2 + iP_2]^- &= \{\Phi_1(\sigma) - X_2(\sigma)\} - \{\Phi_2(\sigma) - X_1(\sigma)\} \equiv \Omega_1^+(\sigma) - \Omega_1^-(\sigma) = 0 \quad , \\ [u_1 + iv_1]^+ - [u_2 + iv_2]^- &= \left\{ \frac{k_1}{2G_1} \Phi_1(\sigma) + \frac{1}{2G_2} X_2(\sigma) \right\} - \left\{ \frac{k_2}{2G_2} \Phi_1(\sigma) + \frac{1}{2G_1} X_2(\sigma) \right\} \\ &\equiv \Omega_2^+(\sigma) - \Omega_2^-(\sigma) = 0 \quad . \end{aligned} \right\} \quad \dots (3)$$

ここで、Fig.1(a)のMatrix側の任意点 $z_0 = x_0 + iy_0$ に集中力 X_1, Y_1 , 集中偶力 M_1 および x, y 方向の点転位 $[\xi_1], [\eta_1]$, 点膨張 K^* が存在する場合の初期設定の関数 $\Phi_k(\zeta)$, $\Psi_k(\zeta)$ を次のように選定する。

$$\left. \begin{aligned} {}_0\Phi_1(\zeta) &= M \ln(\zeta - \zeta_0) \quad , \quad {}_0\Phi_2(\zeta) = {}_0\Psi_2(\zeta) = 0 \quad , \\ {}_0\Psi_1(\zeta) &= N \ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{1}{\omega'(\zeta_0)} \cdot \frac{K-M}{\zeta - \zeta_0} \quad , \end{aligned} \right\} \quad \dots (4)$$

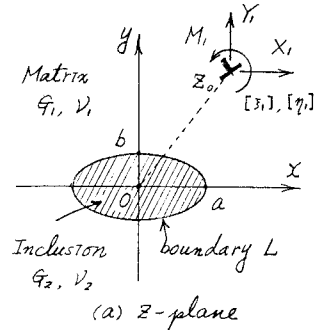
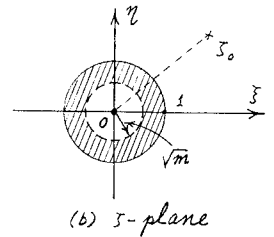
(a) z -plane(b) ζ -plane

Fig. 1

$$\left. \begin{aligned} K &= K^* + i(M_1/2\pi), \\ M &= \frac{G_1}{\pi(k_1+1)} [\eta_1 - i\xi_1] - \frac{1}{2\pi(k_1+1)} (X_1 + Y_1), \quad N = \dots \end{aligned} \right\}$$

式(2), (4)から $\circ X_k(\zeta)$ を求め、それらと式(3)を組み合わせて、 $\Omega_k(\zeta)$ を定めると最終的に次のようになる。

$$\Omega_1(\zeta) = \circ\Phi_1(\zeta) - \circ X_1(\zeta), \quad \Omega_2(\zeta) = \frac{k_1}{2G_1} \circ\Phi_1(\zeta) + \frac{1}{2G_2} \circ X_1(\zeta), \quad \dots \quad (5)$$

他方、式(3)で定義した $\Omega_k(\zeta)$ の一般式から複素解析関数 $\Phi_k(\zeta), \Psi_k(\zeta)$ が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\zeta) &= \frac{1}{\Gamma k_1 + 1} \{ \Omega_1(\zeta) + 2G_2 \Omega_2(\zeta) \}, \\ \Psi_1(\zeta) &= -\overline{\omega} \left\{ \frac{1}{\zeta} \right\} \Phi_1(\zeta) + \frac{1}{\Gamma + k_2} \left\{ -k_2 \overline{\Omega_1} \left\{ \frac{1}{\zeta} \right\} + 2G_2 \overline{\Omega_2} \left\{ \frac{1}{\zeta} \right\} \right\}, \\ \Phi_2(\zeta) &= \frac{1}{\Gamma + k_2} \{ \Gamma \Omega_1(\zeta) + 2G_2 \Omega_2(\zeta) \}, \\ \Psi_2(\zeta) &= -\overline{\omega} \left\{ \frac{1}{\zeta} \right\} \Phi_2(\zeta) + \frac{1}{\Gamma k_1 + 1} \left\{ -\Gamma k_1 \overline{\Omega_1} \left\{ \frac{1}{\zeta} \right\} + 2G_2 \overline{\Omega_2} \left\{ \frac{1}{\zeta} \right\} \right\}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (6)$$

ここに、 $\Gamma = G_2/G_1$ でDundurs constantと呼ばれる。

以上によって、式(4), (5)より $\Phi_k(\zeta), \Psi_k(\zeta)$ が具体的に定められた。しかし、このままではまだ全ての条件を満たしたものとなっていない。そこで、残りの条件としてまず、Fig.1(a)の共焦点間は本来連続しているの、領域2における関数 $\Phi_2(\zeta), \Psi_2(\zeta)$ は、 $|\zeta| = \sqrt{m}$ の円上の上下の各半円上で同一の値をとる必要がある。したがって、このことを達成させるために、

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{\Phi}_2(\zeta) &= \Phi_2(\zeta) + s\Phi_2(\zeta), \quad \widetilde{\Phi}_2(\sqrt{m}\sigma) = \widetilde{\Phi}_2(\sqrt{m}/\sigma), \\ \widetilde{\Psi}_2(\zeta) &= \Psi_2(\zeta) + s\Psi_2(\zeta), \quad \widetilde{\Psi}_2(\sqrt{m}\sigma) = \widetilde{\Psi}_2(\sqrt{m}/\sigma). \end{aligned} \right\} \dots \quad (7)$$

となるように補正関数 $s\Phi_2(\zeta), s\Psi_2(\zeta)$ を定める。続いて、領域1の無限遠での無応力状態の条件を満たすように、新たな付加関数 $\circ\Phi_2(\zeta), \circ\Psi_2(\zeta)$ を求め、これらを適切に重ね合わせてやれば、所期の目的の複素関数が求められることになる。

3. 従来の研究結果との関係

前節で求めた解析解において、形状を円形(i.e. $m=0$)とすれば、Dundurs & Mura (1964), List (1969), Miller & Young (1987) に、rigid line crack(i.e. $m=0, \Gamma=\infty$) とすれば、Chen & Cheung (1987) に、さらに、自由境界の楕円形孔(i.e. $\Gamma=0$) とすれば、Vitek (1976), 村上 (1977) に、楕円形剛体 Inclusion (i.e. $\Gamma=\infty$) とすれば、Santare & Keer (1986) に、それぞれ基本的に一致したものとなる。

4. むすび

特異荷重項がInclusion 内部にある場合の理論式や、具体的な数値計算例ならびに詳細については、講演会当日発表する。

参考文献:

- Chen, YZ & Cheung, YK (1987): Eng. Fract. Mech., Vol. 26, pp. 729-739.
 Dundurs, J. & Mura, T. (1964): J. Mech. Phys. Solids, Vol. 12, pp. 177-189.
 List, RD (1969): Proc. Comb. Phil. Soc., Vol. 65, pp. 823-830.
 Miller, GR & Young, RP (1987): J. Appl. Mech., Vol. 54, pp. 738-740.
 村上敬宜 (1977): 日本機械学会論文集(第一部) 第43巻, 370号, pp. 2022-2031.
 Santare, MH & Keer, LM (1986): J. Appl. Mech., Vol. 53, pp. 382-385.
 Vitek, V. (1976): J. Mech. Phys. Solids, Vol. 24, pp. 263-275.