

I-75

異種材料接合問題の解析

東急建設㈱ 正員 奥村幹也

名古屋工業大学 正員 長谷部宜男 中村卓次

【緒言】 近年複合材料が構造一次要素をなす部材として多用される傾向があり、構造的にも材料的にも異種材料接合部は数多く、接合境界付近の力学的な知見の重要性が増大している。しかし、複合材料の力学的な挙動は単一材料に比べて極めて複雑でその知見は十分なものではない。ここでは、2つの異種材料の接合部が直線、それ以外は接合線に対称な任意の形状を考え、有理写像関数と複素応力関数を用い、平面弾性混合境界値問題の解を誘導し、接合線に対称な2つの異種材料半無限板が有限長で接合され、無限遠で集中偶力を受ける問題の応力分布例を示す。

【Riemann-Hilbert問題への定式化】 材料定数が異なり、接合線に対称な半平面が接合された無限板(図-1a)で、 $Y \geq 0$ を材料I、 $Y \leq 0$ を材料IIと呼ぶ。IをX軸に関して対称変換すればI、IIの形状は一致する(図-1b)。よって t_1 、 t_2 -平面(図-1c)への写像関数は同一のものをを用いることができる。特にI、IIの接合線上の点は、図-1a、1cでI、IIとも同一座標点であり、接合線の境界条件が同じ変数で与えられる。

図-1bを、図-1cに写像する関数は、

$$z_j = \omega(t_j) = \frac{E_0}{1-t_j} + \kappa_j \frac{E_1}{\tau_k - t_j} + E_c \quad (1)$$

ただし $j=1,2$ で添字 j は材料I、IIを表す(以下同様)。本報告では、 $N=24$ である。境界上では $z_1=z_2$ なら $t_1=t_2$ で、写像面1,2の区別は必要なく、境界上での t_j を σ と置く。また、接合部の境界をM、それ以外の境界を L_j と呼ぶ。

外力の作用していない境界が存在する場合には、解析接続により $\psi_j(t_j)$ は、 $\overline{\omega(1/t_j)}$

$$\psi_j(t_j) = -\overline{\phi_j(1/t_j)} - \frac{\overline{\omega'(1/t_j)}}{\omega'(t_j)} \phi_j'(t_j) \quad (2)$$

図-1a、1bでの外力および変位成分の関係は、

$$\begin{aligned} P_{X1} &= -p_{X1}, P_{Y1} = p_{Y1}, U_1 = u_1, V_1 = -v_1 \\ P_{X2} &= p_{X2}, P_{Y2} = p_{Y2}, U_2 = u_2, V_2 = v_2 \end{aligned} \quad (3)$$

L_j 上では2つの外力成分が与えられる。外力成分 p_{jx} 、 p_{jy} を与える境界条件式は t_1 、 t_2 -

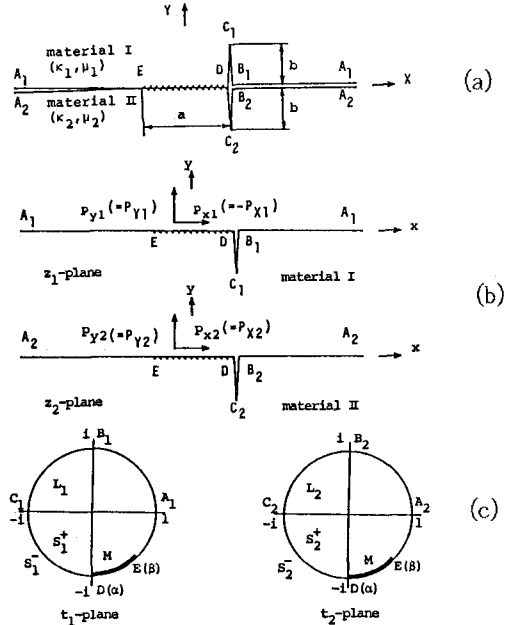


図-1 接合線に対称な異種材料と写像面
平面でそれぞれ独立に与えられる。

$\phi_j^+(\sigma) - \phi_j^-(\sigma) = i \int_{L_j} (p_{xj} + ip_{yj}) ds \equiv h_{L_j}(\sigma) \quad (4)$
領域の内部から境界に近付いた値に+、外部から近付いた値に-をつけている(図-1c参照)。

M上では接合線上の応力と変位とが連続する。M上の合力を、M上での外力 p_{xj}^b 、 p_{yj}^b と、切断線上の応力 $p_{xj}^s(=\sigma_{xj})$ 、 $p_{yj}^s(=\tau_{xyj})$ とに分解し、M上の変位を、切断線上の変位 u_j^s 、 v_j^s と、M上で与えられる変位 u_j^b 、 v_j^b とに分解する。図-1aでの連続条件に対する図-1bで連続条件は(3)から得られ、境界上で $\sigma=1/\overline{\sigma}$ より、

$$\begin{aligned} \phi_1^+(\sigma) - \phi_1^-(\sigma) &= \phi_2^+(1/\overline{\sigma}) - \phi_2^-(1/\overline{\sigma}) + f_1(\sigma) \\ f_1(\sigma) &= i \int_{L_1} (p_{x1}^b + ip_{y1}^b) ds + i \int_{L_2} (p_{x2}^b - ip_{y2}^b) ds \\ &= \frac{1}{\mu_1} [\kappa_1 \phi_1^+(\sigma) + \phi_1^-(\sigma)] \\ &= \frac{1}{\mu_2} [\kappa_2 \phi_2^+(1/\overline{\sigma}) + \phi_2^-(1/\overline{\sigma})] + D_1(\sigma) \end{aligned} \quad (5)$$

$$D_1(\sigma) = 2[(u_1^b + iv_1^b) - (u_2^b - iv_2^b)] \quad (6)$$

μ_j は剪断弾性係数、 κ_j はポアソン比 ν_j の関数で、平面歪状態では $3-4\nu_j$ 、一般化された平

面応力状態では $(3-\nu_s)/(1+\nu_s)$ である。ここで関数 $\Theta_1(t_1)$ を考える。

$$\Theta_1(t_1) = \phi_1(t_1) + \phi_2(1/\bar{t}_1) \quad (7)$$

(5) は $\Theta_1(\sigma) - \Theta_{\bar{1}}(\sigma) = f_1(\sigma)$ と変形され、この一般解は $g_1(t_1)$ を任意の有理関数として、

$$\begin{aligned} \Theta_1(t_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{f_1(\sigma)}{\sigma - t_1} d\sigma + g_1(t_1) \\ &\equiv F_1(t_1) + g_1(t_1) \end{aligned} \quad (8)$$

境界上で $g_1^+(\sigma) = g_1^-(\sigma) \equiv g_1(\sigma)$ よりM上の $\phi_1(\sigma)$ の境界条件式は(6)(7)(8)から、

$$\begin{aligned} \phi_1^+(\sigma) + \lambda_1 \phi_1^-(\sigma) &= \gamma_1 g_1(\sigma) + h_{M1}(\sigma) \\ h_{M1}(\sigma) &= \frac{\gamma_1}{\kappa_2 + 1} [\kappa_2 F_1^-(\sigma) + F_1^+(\sigma)] + \frac{\mu_2 \gamma_1}{\kappa_2 + 1} D_1(\sigma) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\lambda_1 = \frac{\kappa_2 \mu_1 + \mu_2}{\kappa_1 \mu_2 + \mu_1}, \quad \gamma_1 = \frac{\mu_1(\kappa_2 + 1)}{\kappa_1 \mu_2 + \mu_1} \quad (10)$$

【一般解の誘導】 (4)(9)で境界条件式が与えられるRiemann-Hilbert問題の一般解は、

$$\begin{aligned} \phi_1(t_1) &= H_1(t_1) + \frac{\gamma_1 \chi_1(t_1)}{2\pi i} \int_M \frac{g_1(\sigma) d\sigma}{\chi_1^+(\sigma)(\sigma - t_1)} \\ &\quad + \chi_1(t_1) P_1(t_1) \end{aligned} \quad (11)$$

$$H_1(t_1) = H_{L1}(t_1) + H_{M1}(t_1)$$

$$= \frac{\chi_1(t_1)}{2\pi i} \int_L \frac{h_{L1}(\sigma)}{\chi_1(\sigma)(\sigma - t_1)} d\sigma + \frac{\chi_1(t_1)}{2\pi i} \int_M \frac{h_{M1}(\sigma)}{\chi_1(\sigma)(\sigma - t_1)} d\sigma$$

$P_1(t_1)$ は任意の有理関数、 $\chi_1(t_1)$ はPlemelj関数である。

$$\begin{aligned} \chi_1(t_1) &= (t_1 - \alpha)^{m_1} (t_1 - \beta)^{1-m_1} \quad (12) \\ m_1 &= 0.5 + i(\ln \lambda_1)/(2\pi) \text{ で、} \alpha, \beta \text{ は境界 } L_1 \text{ と } M \text{ の接続点 } D, E \text{ に対応する(図-1c)。} \end{aligned}$$

$g_1(t_1)$ を次式のように置く。

$$g_1(t_1) = \sum_j \frac{a_{1j}}{\xi_{1j} - t_1} + \sum_j \frac{b_{1j}}{\eta_{1j} - t_1} \quad (13)$$

$|\xi_{1j}| > 1, |\eta_{1j}| < 1$ で、 a_{1j}, b_{1j} は未定の複素定数である。今の場合 $g_1(t_1)$ の2位以上の極および正則項の係数は最終的に0になるため、初めから(13)の形に置いている((16)参照)。

(11)の右边第2項は、M上の径路積分をMに関する周回積分で表し、留数定理を用いて求められる。

次に、(2)で表される $\psi_1(t_1)$ の S_1^+ での正則条件より、 $P_1(t_1)$ を決定する。(11)(13)を用いて(2)の右边を表す。 $\phi_1(t_1)$ は S_1^+ で正則であるから、(2)の右边の S_1^+ で不正則な項は互いに打ち消さなければならない。よって、 $P_1(t_1)$ は

$$P_1(t_1) = - \sum_{k=1}^N \frac{\overline{A_{1k}} B_k}{\chi_1(\xi_k)(\xi_k - t_1)} \quad (14)$$

$A_{1k} = \phi_1(\xi_k), B_k = E_k / \omega'(\xi_k)$ である。

$\phi_2(t_2)$ は、上述の過程で、添字1と2を入れ替えた式により表される。

未定数 $a_{nj}, b_{nj} (n=1, 2)$ を(8)が恒等的に成立する条件により定める。 $\phi_2(1/\bar{t}_1)$ 中の $\chi_2(1/\bar{t}_1)$ の項は $\chi_1(t_1)$ で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\chi_2(1/\bar{t}_1)}{\chi_2(\xi_{2j})} &= \frac{\xi_{2j}' \chi_1(t_1)}{\chi_2(\xi_{2j})} = \frac{\chi_2(1/\bar{t}_1)}{\chi_2(\eta_{2j})} = \frac{\eta_{2j}' \chi_1(t_1)}{\chi_2(\eta_{2j})} \\ \xi_{2j}' &= 1/\xi_{2j}, \quad \eta_{2j}' = 1/\eta_{2j}, \quad m_2 = \bar{m}_1 \text{ である。} \end{aligned} \quad (15)$$

(7)で表される(8)の右边と(13)で表される(8)の左边とは、 S_1^+, S_1^- でそれぞれ同一の極を持ち、その時恒等的に等しくなければならない。本報告では、 $H_1(t_1) + H_2(1/\bar{t}_1)$ は極を持たないから、

$$g_1(t_1) = - \sum_{k=1}^N \frac{\overline{A_{1k}} B_k}{\xi_k - t_1} + \sum_{k=1}^N \frac{A_{2k} \overline{B_k} \xi_k'}{\xi_k' - t_1} \quad (16)$$

以上により、 $\phi_1(t_1)$ が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_1(t_1) &= H_1(t_1) \\ &\quad - \frac{\gamma_1}{1+\lambda_1} \sum_{k=1}^N \left[1 + \frac{\mu_2(\kappa_1+1)\chi_1(t_1)}{\mu_1(\kappa_2+1)\chi_1(\xi_k)} \right] \frac{\overline{A_{1k}} B_k}{\xi_k - t_1} \\ &\quad + \frac{\gamma_1}{1+\lambda_1} \sum_{k=1}^N \left[1 - \frac{\chi_1(t_1)}{\chi_1(\xi_k)} \right] \frac{A_{2k} \overline{B_k} \xi_k'^2}{\xi_k' - t_1} \end{aligned} \quad (17)$$

$\phi_2(t_2)$ は添字1, 2を入れ替えて得られる。

【応力分布】 ここで得られた解を用いて図-2に無限遠で集中偶力が作用する場合の応力分布例を示す。材料定数として(18)で表されるDundurs定数を考える。Dundurs定数が等しければ、応力状態は同一になる。

$$\alpha_D = \frac{(\kappa_1+1)\Gamma - (\kappa_2+1)}{(\kappa_1+1)\Gamma + (\kappa_2+1)}, \quad \beta_D = \frac{(\kappa_1-1)\Gamma - (\kappa_2-1)}{(\kappa_1+1)\Gamma + (\kappa_2+1)}, \quad (18)$$

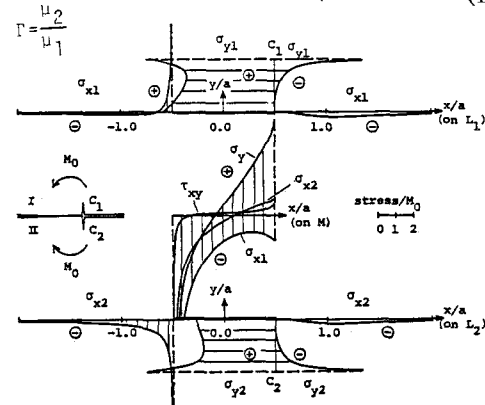


図-2 応力分布例($b/a=0.5, \alpha_D=-0.5, \beta_D=-0.15$)