I－23

骨組構造物の非線形解析の簡易化について

九州大学工学部　学生員　脇屋泰士
同　　上　正会員　彦坂　熙

1．緒言

計算機の進歩により、構造物の材料および幾何学的非線形性を考慮した安全性照査を設計者に委ね、設計基準をより合理化する可能性が高まっている。骨組構造物の解析に最も汎用性のあるマトリックス変位法を用いる場合には、増分法にニュートン・ラフソン法を併用してつり合い経路の追跡を行うのが一般的であるが、反復計算の度ごとに接線剛性行列を求めてそれを解くのに多大の時間を要する難点がある。ここでは、材料非線形性およびはり－柱として扱われる程度の幾何学的非線形性を有する平面骨組構造物を対象として、非線形解析を設計実務に取り入れやすくするための２～３の簡易化と接線剛性行列を用いない解法および算例について報告する。

2．変形後の部材座標系における要素端断面力

1）弾性断面力

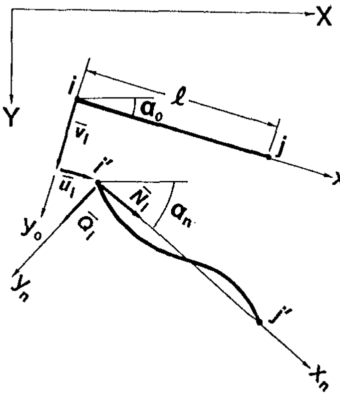
構造全体の基準座標系(X,Y)において、構造物の幾何学的非線形性を考慮した部材要素端の変位vが求められれば、変形前の部材座標系(x_0,y_0)における要素端変位$\overline{v}$は、両座標系の変換行列T_0を用いて次のように表される。

$$\overline{v} = T_0 v \tag{1}$$

要素端の断面力$\overline{S}$と変位の関係は、部材座標系における弾性微小変形理論に基づく周知の剛性行列$\overline{k}$を用いて、次式で表される。

$$\overline{S} = \overline{k}\,\overline{v} = \overline{k}\,T_0 v \tag{2}$$

上式の$\overline{S}$は部材座標系(x_0,y_0)に関するものであるが、はり－柱として扱われる程度の幾何学的非線形問題においては、変形後の部材座標系(x_n,y_n)における要素端力$\overline{S}$を式(2)で算定できるものと考える。



図－1　基準座標系と変形前・後の部材座標系

2）弾塑性断面力

材料の完全弾塑性と部材軸方向直応力σのみによる塑性化を考慮して、部材座標系における要素端力$\overline{S}$を算定する。要素端の変位vを用いて式(2)から弾性断面力$\overline{S}^e = \overline{k}\,T_0 v$が算定され、任意の要素i-jの例えばi端断面における軸力$N_i{}^e$と曲げモーメント$M_i{}^e$から、応力σ_iが次式で表される。

$$\sigma_i = \frac{N_i{}^e}{A} + \frac{M_i{}^e}{I} z + \sigma_r \leqq \sigma_y \tag{3}$$

ここに、A,I は要素の断面積と断面二次モーメント、σ_rは残留応力、σ_yは降伏応力。
上式のσ_iを用いて、弾塑性軸力$N_i{}^p$と曲げモーメント$M_i{}^p$が、次の断面積分により算出される。

$$N_i{}^p = \int_A \sigma_i\,dA, \qquad M_i{}^p = \int_A \sigma_i\,z\,dA \tag{4}$$

要素i-jの部材座標系(x_n,y_n)における要素端弾塑性断面力としては、次の$\overline{S}$を用いることとする。

$$\overline{S} = (\overline{N_i}\ \ \overline{Q_i}\ \ \overline{M_i}\ \ \overline{N_j}\ \ \overline{Q_j}\ \ \overline{M_j})^T \tag{5}$$

$$\overline{N_i} = -\overline{N_j} = -(N_i{}^p - N_j{}^p)/2, \quad \overline{Q_i} = -\overline{Q_j} = -(M_i{}^p + M_j{}^p)/\ell, \quad \overline{M_i} = M_i{}^p, \quad \overline{M_j} = M_j{}^p$$

3．基準座標系における要素端断面力とつり合い方程式

式(2)または式(5)で与えられる部材座標系(x_n,y_n)の要素端力$\overline{S}$を用いて、基準座標系(X,Y)における変形を考慮したつり合い方程式を導く。座標系(x_n,y_n)と(X,Y)との間の変換行列をT_n(v)とすれば、基準座標系における要素端力Sは、次式で求められる。

$$S = T_n{}^T\,\overline{S} \tag{6}$$

T_nおよび$\overline{S}$はともに変位vに依存するので、S－v関係は非線形である。いま、骨組構造物の任意節点i

にm本の部材要素が接続するとき、点iの内力の合力を

$$R_i(v)=\sum^{m} S_i \qquad (7)$$

と表す。節点iに作用する外力をP_iとすれば、この点のつり合い方程式が次のように書き表される。

$$P_i=\sum^{m} S_i \qquad \text{または} \qquad P_i-R_i(v)=0 \qquad (8)$$

4．非線形つり合い方程式の簡易解法

図－2のように荷重－変位関係が非線形の構造物において、与えられた荷重増分F_1に対する変位増分vを求めるものとする。まず、初期剛性行列K_0を用いて弾性微小変形解$v_1=K_0^{-1}F_1$を求め、式(6),(7)からv_1に対する非線形内力$R_1(v_1)$を計算する。次いで、スカラーの未定乗数x_1をv_1にかけた$v=x_1v_1$をvの第１近似値と考えれば、不平衡力$F_2=F_1-x_1R_1$が残ることになる。未定乗数x_1は不平衡力F_2を最小にするように決定するものとし、仮想変位 $\delta v=v_1\delta x_1$に対して仮想仕事の原理を適用すれば

$$F_2^T\delta v=(F_1-x_1R_1)^Tv_1\delta x_1=0 \qquad (9)$$

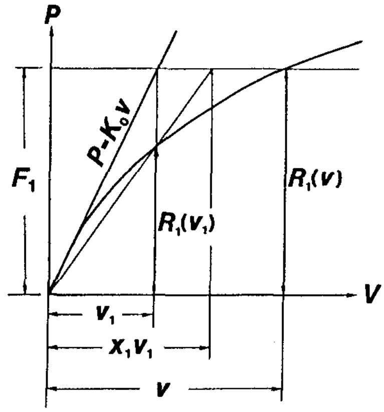
ここにδx_1は任意のスカラーであるから、上式より

$$x_1=\frac{F_1^Tv_1}{R_1^Tv_1} \qquad (10)$$

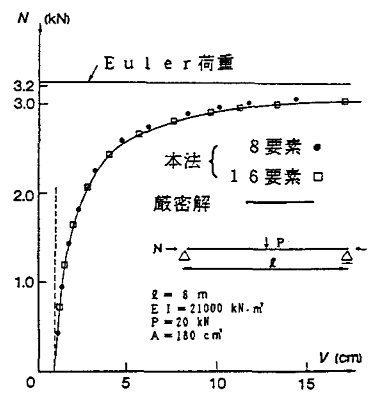
このx_1から得られる不平衡力$F_2=F_1-x_1R_1$が十分に小さくなければF_i(i=2,3,…,n)に対して以上の操作を反復し、

$$v=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i \qquad (11)$$

を荷重増分F_1に対する変位増分の収束解とする。



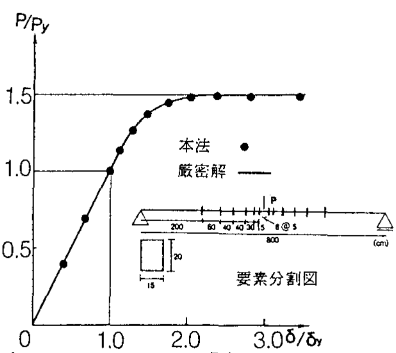
図－２　非線形荷重－変位関係



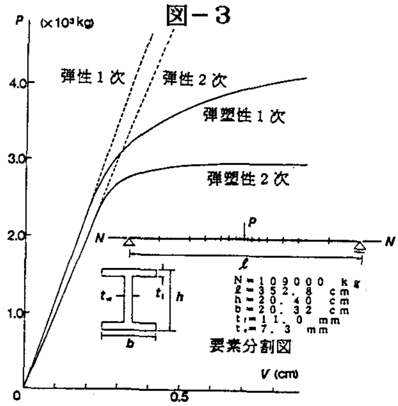
図－３

5．計算例

図－３は、主として幾何学的非線形解析の式(2)による簡易化の妥当性を確認するため、P＝一定で軸圧縮力Nを増加させたはり－柱(要素分割数8および16)の中点のたわみを算定した結果を示す。図－４は、材料非線形解析の式(3)～(5)による簡易化の妥当性を確認するため、集中荷重Pを受ける長方形断面単純ばり(要素分割数18)の中点のたわみを算定したものである。また図－５は、材料および幾何学的非線形性を同時に考慮した場合(弾塑性２次理論)を含み、軸力N＝一定で集中荷重Pを増加させたＩ形断面単純ばりの中点のたわみを算定したものである。



図－４



図－５

〔参考文献〕

1) Ch.Stutzki: Traglastberechnung raeumlicher Stabwerke unter Beruecksichtigung verformbarer Anschluesse. Dissertation, Achen 1982.

2) G.Sedlacek et al: Ein computerorientiertes Verfahren zur statischen Berechnung raeumlicher Stabwerke unter Beruecksichtigung nichtlinearer Effekte. Bauingenieur 60 (1985) pp.297-305.