I-17 周期自乗和・座屈荷重逆数和を最小化する長方形板の断面変化法に関する研究

○ 松尾橋梁 正会員 斎藤博之
滝上工業 正会員 安藤浩吉
岐阜大学 正会員 中川建治

1 厚さの変わる板の面外曲げの微分方程式

厚さが緩やかに変化する等方性平板の曲げ問題に関する微分方程式として、次のような断面力 M_X, M_Y, M_{XY}と荷重p(x,y)の釣り合い式を基礎にする。

$$\frac{\partial^2 M_X}{\partial X^2}+2\frac{\partial^2 M_{XY}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_Y}{\partial Y^2}=-p(x,y) \quad \cdots\cdots(1)$$

曲げたわみをw(x,y)、板の曲げ剛性をK とすると断面力は次のようになる。

$$M_X=-K\,(w_{XX}+\nu w_{YY})\text{、}M_Y=-K\,(w_{YY}+\nu w_{XX})\text{、}M_{XY}=-(1-\nu)K w_{XY} \quad \cdots\cdots(2)$$

ここで記述を簡素化するために本研究のみにおける仮の微分演算子Д, Жを採用すると、

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\;,\quad Д=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\;,\quad Ж=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \quad \cdots\cdots(3)$$

断面力と式(1) は次のように表されることになる。厚さの変わる板の微分方程式をこのような形に表現するのは差分法によって微分方程式を行列表示する場合の便宜を計る為である。

$$M_X=-\frac{K}{2}\{(1+\nu)\Delta+(1-\nu)Д\}w\;,\quad M_Y=-\frac{K}{2}\{(1+\nu)\Delta-(1-\nu)Д\}w$$
$$M_{XY}=-(1-\nu)KЖw \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\frac{(1+\nu)}{2}\Delta(K\Delta w)+\frac{(1-\nu)}{2}Д(KДw)+2(1-\nu)Ж(KЖw)=p(x,y) \quad \cdots\cdots(5)$$

2 行列表示

厚さの変わる板の微分方程式を行列表示で具体的に表現するには、単純支持辺・固定辺あるいは自由辺に対する境界条件を必要とする。具体的な各論は省略して結論のみを簡単に示すが、式(1) の左辺は次のように個別に逆行列を求め得る正方行列の積の形で表現されることが分かる。

式(5) の微分方程式が行列表示ではどのようになるかを概説しよう。式(3) で定義されている2階微分演算子Δ, Ж, Дは境界条件を含めて差分法によって行列表示されて、式(5) の各項はそれぞれ次のように表現される。

$$\frac{(1+\nu)}{2}\Delta(K\Delta w)=H_1^T D_1 H_1\,\{w_{ij}\}\;,\quad \frac{(1-\nu)}{2}Д(KДw)=H_2^T D_2 H_2\,\{w_{ij}\} \quad \cdots\cdots(6)$$
$$2(1-\nu)Ж(KЖw)=H_3^T D_3 H_3\,\{w_{ij}\}$$

ここに D_j は板の各点（差分格点）の剛性を表す対角行列であって、

D_1は $\frac{(1+\nu)}{2}$ Kを、D_2は $\frac{(1-\nu)}{2}$ Kを、D_3は $2(1-\nu)$Kを対角要素とする対角行列である。

要素行列 H_j は必ずしも正方行列ではなく H_1は微分演算子Δを、H_2は微分演算子Дを、H_3は微分演算子Жを境界条件を加味して差分で表現した小行列である。 この場合の Stiffeness matrix S_1は

$$S_1=H_1^T D_1 H_1+H_2^T D_2 H_2+H_3^T D_3 H_3 \quad \cdots\cdots(7)$$

ではあるが､これを次のような正方形の大行列の積で表す為に dummy element の小行列Pを設定して、S_2 を

$$S_2=\begin{pmatrix} H_1^T & H_2^T & H_3^T & \\ P^T & & & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & \\ 0 & D_2 & 0 & \\ 0 & 0 & D_3 & \\ & & & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1 & P \\ H_2 & \\ H_3 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_U^T & A_L^T \\ P^T & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_U & 0 \\ 0 & D_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_U & P \\ A_L & E \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(8)$$

と定義する。ここでPを $A_U^T D_U P+A_L^T D_L=0$ $\cdots\cdots(9)$

を満足するものとするとS_2はS_1を対角要素（小行列）の1つとする対角大行列となる。これを本研究では一般化された Stiffeness matrix S_2と名付ける。式(8) は個別に逆行列を持つ3個の大行列の積となっている。固有値の逆数和Γ（固有周期の二乗和）を極値にする断面変化は、この一般化された剛性行列の因数分解式(8) を用いて求めるのである。

3　固有値の逆数和について

実対称行列Ｓに対して重み行列Ｍを以て直交する行列Ｖによる固有値行列〔λ〕を

$$V^T S V = [\lambda], \quad V^T M V = E \qquad \cdots\cdots(10)$$

と表現する。行列Ｓの逆行列を $F = S^{-1}$ とすると固有値の逆数和は次のようにして得られる。

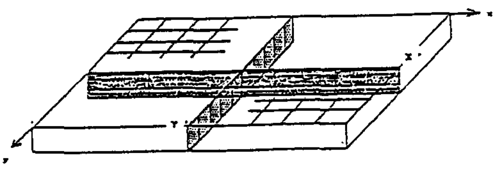
$$\Sigma(1/\lambda_k) = \mathrm{Trace}([\lambda^{-1}]) = \mathrm{Trace}(FM) \qquad \cdots\cdots(11)$$

1）振動の問題では式(1)の p(xy) は質量行列 M、たわみベクトルＵと $\lambda = \omega^2$ の積であり、固有値の逆数和は固有周期の二乗和に相当する $\Sigma(1/\lambda_k) = (1/4\pi^2)\Sigma\ T^2$ 。建設材料の総重量（総体積）Ｖを一定にする条件で固有値の逆数和を最小にすることは近似的に１次振動の周期を最小にすることになり、近似的に動的見地より最も固い構造物を設計することになる。

2）座屈問題では、p(xy) はたわみの曲率 u_{xx} と座屈荷重Ｐの積 $P u_{xx}$ となり、差分法で行列に展開すると $Su + PWu = 0$ となる。行列Mは質量行列ではなく２階微分演算子を意味することになる。この場合には固有値λは座屈荷重Ｐそのものであり、固有値の逆数和は座屈荷重の逆数和を意味することになる。$\Sigma(1/\lambda_k) = \Sigma(1/P_j)$ 一般の構造物の座屈問題も同様なものとなるので、座屈問題で固有値の逆数和を最小にする設計法とは座屈荷重の逆数和を最小にすることになり、近似的に第１次座屈荷重を最大にするという合理的な設計法と言えよう。

4　計算例

固有値の逆数和を最小にするについての拘束条件は『有効に剛性に関与する構造材料の総重量（総体積）を一定値Ｖとする。』である。ラグランジェの未定係数法によってこのような極値問題は解き得る。計算例は、正方形の周辺単純支持板と正方形の周辺固定支持板であり、座屈の場合はｘ軸方向の一様面内力とする。それぞれの中央断面の板厚と曲げ剛さの分布を図２、図３に示す。



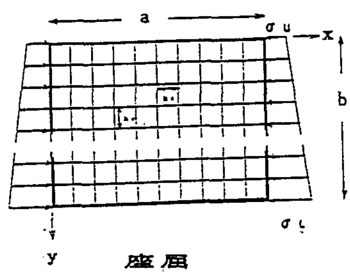


図１　正方形の板

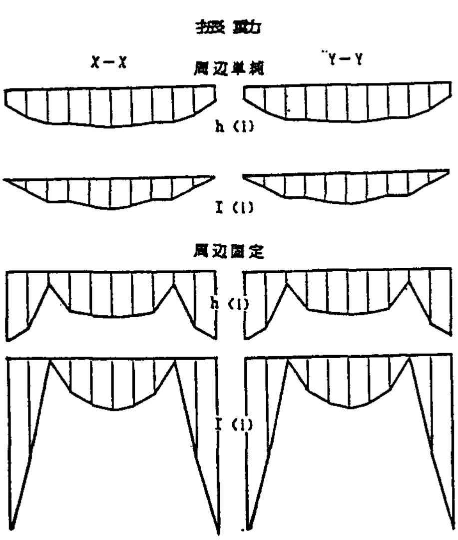


図２　固有周期自乗和最小の板の中央断面

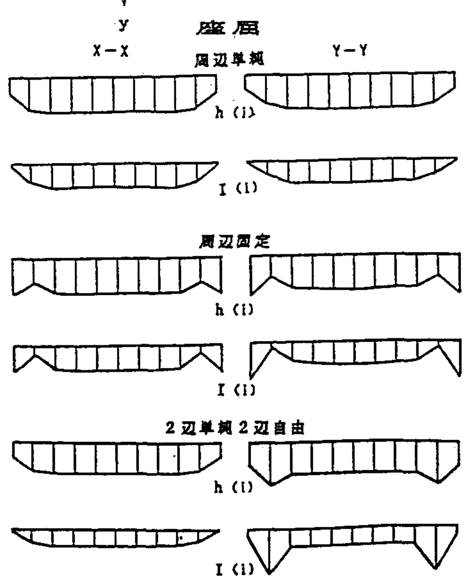


図３　座屈荷重逆数和最小の板の中央断面