

I-8

軸変形及びせん断変形を考慮したエラスチカ問題の楕円積分解

名工大 学生員 ○吉光 友雄

名工大 正員 後藤 芳顕 小畑 誠 松浦 聖

1. まえがき: 平面棒材の有限変位問題の閉じた解が、楕円積分で表現されることは、古くからエラスチカ問題¹⁾の名で知られている。しかしながら、著者の知る限りにおいては、これらはすべて軸線の不伸張の仮定、ならびにせん断変形を無視した断面の直角保持の仮定を導入したもので、この両者の仮定をはずした解は言うまでもなく、いずれか一方の仮定をはずしたのも、軸線の伸張変形を考慮した著者の解²⁾以外には見当たらない。ここでは著者らによる軸線の伸張変形を考慮した楕円積分の解をさらに発展させ、軸線の変形ならびにせん断変形を考慮した定初期曲率を持つチモシェンコはりの厳密な有限変位理論に対する楕円積分解を誘導したので、その概要を報告する。

2. 支配方程式: 有限ひずみ・有限変位問題におけるチモシェンコはりの厳密な支配方程式は、Reissner³⁾によって初めて提示されたが、構成則については2、3のものが報告されている。^{3)~5)}ここで用いる支配方程式はTable-1に示すものであるが、構成則については各種検討した結果、閉じた解が誘導できるものとして、Chaisson⁴⁾らによるものと、これらをもとに近似化された微小ひずみ条件下の式([] で示す)を用いる。

3. 解の積分表示: Table-1の支配方程式を文献2)の方法で積分を行うと、Fig-1で示されるi節点とi+1節点の物理量、いわゆる一般解が積分によってTable-2のように表される。ここで物理量はすべて無次元化されており、添字i, i+1が各節点に対応する諸量であることを示している。Table-2を見るとわかるように一般解は、2つの独立なパラメータとして細長比λと軸剛性のせん断剛性に対する比μに支配されている。もしここでμ=0とするとその一般解はベルヌーイ・オイラーの仮定より導いた解と一致する。

4. 楕円積分標準形への変換: Table-2の積分

Table-1. Governing Equation

Equilibrium Equation	Constitutive Relations
$\{N \cos(\alpha - \Lambda) - V \sin(\alpha - \Lambda)\}' = 0$	$N = E\tilde{A}(\sqrt{g_0} \cos \Lambda - 1)$
$\{N \sin(\alpha - \Lambda) + V \cos(\alpha - \Lambda)\}' = 0$	$[N = E\tilde{A}(\sqrt{g_0} - 1)]$
$M' - \sqrt{g_0}(V \cos \Lambda - N \sin \Lambda) = 0$	$V = kGA \sqrt{g_0} \sin \Lambda$
$[M' - (V - N\Lambda) = 0]$	$[V = kGA \Lambda]$
	$M = -E\tilde{I}(\alpha' - \Lambda' + \kappa_0)$

Remarks: The following notations are used throughout tables

$$\tilde{A} = \int_A \frac{1}{1 + \kappa_0 n} dA \quad \tilde{I} = \int_A \frac{n^2}{1 + \kappa_0 n} dA$$

ここで変数変換 $X = \tan \frac{\phi}{2}$ を行うことにより

I₁ ~ I₆ は

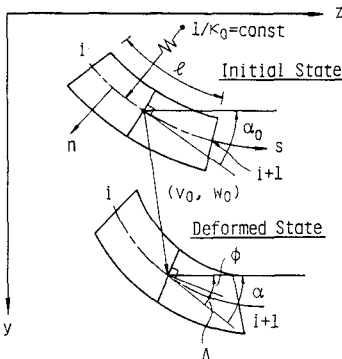


Fig.1 Geometry of the Initial and the Deformed Beam Element

Table-2. Integral Solutions

$I_1=1$ $B_{i+1}=B_i, C_{i+1}=C_i$ $\frac{V_{0i+1} + Y_{0i+1}}{l} = \frac{V_{0i} + Y_{0i}}{l} + \frac{(1-\mu)}{\lambda^2} (B_i I_4 + C_i I_5) + I_2 + C_i \frac{\mu}{\lambda^2}$ $\frac{W_{0i+1} + Z_{0i+1}}{l} = \frac{W_{0i} + Z_{0i}}{l} + \frac{(1-\mu)}{\lambda^2} (C_i I_4 - B_i I_5) + I_3 + B_i \frac{1}{\lambda^2}$ $A_{i+1} = A_i + C_i I_3 - B_i I_2 + \frac{\beta}{\lambda^2} \{ (C_i^2 - B_i^2) I_4 + C_i B_i (I_1 - 2I_5) \}$ $f_i = -\text{sign}(A + \kappa_0 l) \{ (A + \kappa_0 l)^2 - 2C_i (\sin \phi - \sin \phi_i) - 2B_i (\cos \phi - \cos \phi_i) \}$ $- \frac{\beta}{\lambda^2} \{ B_i C_i (\sin 2\phi - \sin 2\phi_i) \}$ $+ \frac{1}{2} (B_i^2 - C_i^2) (\cos 2\phi - \cos 2\phi_i) \}^{1/2}$

Remarks: $A = \frac{M_0}{EI}$, $B = \frac{F_z l^2}{EI}$, $C = \frac{F_y l^2}{EI}$, $\lambda = l \sqrt{\frac{EI}{EA}}$, $\mu = \frac{E\tilde{A}}{kGA}$
 $\beta = 1 - \mu$ (Finite Strains), $\beta = -\mu$ (Small Strains)

$$I_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{R(x)_j}{f_2} dx \quad (j=1\sim 5)$$

$$f_2 = (b_0 X^4 + b_1 X^3 + b_2 X^2 + b_3 X + b_4)^{1/2} \quad \dots(2 \cdot a, b)$$

の形になる。式（2・a）に示される積分は、文献2）に示される方法によると、楕円積分標準形に変換される。その結果初等関数の積分と、3種類の楕円積分標準形により、次のように表すことができる。

なお、[] 内に示す特別の場合には第三種楕円積分は含まれない。

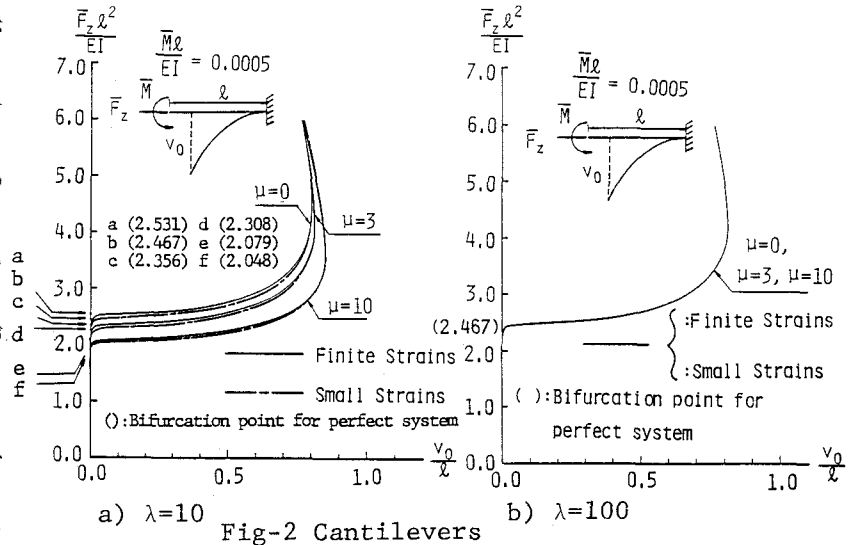
$$I_1 \rightarrow \widetilde{F}, I_2 \rightarrow \widetilde{F} + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\zeta}, I_3 \rightarrow \widetilde{F} + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\zeta}, I_4 \rightarrow \widetilde{F} + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\zeta} + \widetilde{\zeta}, I_5 \rightarrow \widetilde{F} + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\zeta} + \widetilde{\zeta}$$

$$[\text{Small Strains}, \mu=0: I_1 \rightarrow \widetilde{F}, I_2 \rightarrow \widetilde{F} + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\zeta}, I_3 \rightarrow \widetilde{F} + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\zeta}, I_4 \rightarrow \widetilde{F} + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\zeta}, I_5 \rightarrow \widetilde{F} + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\zeta}]$$

$$[\text{Finite Strains}, \mu=1: I_1 \rightarrow \widetilde{F}, I_2 \rightarrow \widetilde{F} + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\zeta}, I_3 \rightarrow \widetilde{F} + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\zeta}] \quad \dots(3 \cdot a-m)$$

$\widetilde{F}$ 、 $\widetilde{\alpha}$ 、 $\widetilde{\zeta}$ はそれぞれ第一種、第二種、第三種楕円積分標準形を表し、 $\widetilde{\zeta}$ は初等関数の積分を表す。

5. 数値計算：軸力は、はりの幾何学的非線形に大きく影響を及ぼすので、計算例としては圧縮軸力及び引っ張り軸力が卓越する、2種類のFig2,3に示す構造物について解析した。結果として、荷重-変位曲線を細長比 $\lambda = 10$ 、 100 について図示し、さらに各図では軸剛性に対するせん断剛性の比 μ をパラメータとし $\mu = 0$ 、 3 、 10 に関して示している。なお、 $\mu = 0$ はベルヌーイ・オイラーのはりを表す。これらより $\lambda = 10$ の場合 μ の影響が大きく、 μ が大きいほど剛性が低下している。また有限ひずみと微小ひずみの式間に差が認められる。一方 $\lambda = 100$ の場合には μ の影響及び有限ひずみと微小ひずみの式間に差はほとんど認められない。



<参考文献>

- 1) Timoshenko, et al: Theory of Elastic Stability 1961
- 2) Y. Goto et al: 土論集, No. 386
- 3) E. Reissner: ZAMP, vol. 23
- 4) T. Chaisonphob et al: 土論集, No. 368
- 5) T. Iwakuma et al: 土論集, No. 344

