I-5　Snap－backつり合い曲線の取扱い

名古屋大学　学生員　倉坪和弥
岐阜大学　正　員　藤井文夫

1．まえがき

変数間で一対一の対応がなくなる複雑なつり合い曲線の追跡には，現在のところ弧長法が最も一般に使われている。筆者らは，弧長法のalternative として，弧長制御式を必要としない軌道追跡型の解法スキームを文献 1,2,3) などで紹介してきた。本稿では，特に変数制御の方法を中心に，弧長法との違いをより明確にし，応用例として骨組構造系のsnap-back の問題の取扱いに焦点を絞ってみた。

2．基礎式

全体量に対する支配方程式　$\{\mathbf{F}\}=\{\mathbf{O}\}$ 式（1）；系の自由度をn，荷重変数を（n＋1）番目の変数X_{n+1} とする。接線（増分）方程式　$[\mathbf{f}]\{d\mathbf{X}/ds\}=\{\mathbf{O}\}$ 式（2）；ただし，$f_{jk}=\partial F_j/\partial X_k$，sは解曲線の弧長で，$\{d\mathbf{X}/ds\}$ は（n＋1）次元空間における解曲線の接線ベクトルである。連立微分方程式　$dX_k/ds=+\nu(-1)^k\ \det[\mathbf{f}^{(k)}]$　式（3）；右上添字の（k）は，k番目の列を除去することを意味する。またνは$d\mathbf{X}/ds$が単位ベクトルであることから決まる比例定数である。反復計算用の連立方程式 $[\mathbf{f}^{(m)*}]\{d\mathbf{X}^{(m)}\}=\{\varepsilon^*\}$ 式（4）；（*）は最新の近似解を用いて評価されることを意味する。右辺の $\{\varepsilon^*\}$ は誤差項で，全体方程式の場合　$\{\varepsilon^*\}=-\{\mathbf{F}^*\}$ 式（5）：増分方程式の場合 $\{\varepsilon^*\}=-[\mathbf{f}^*]\{d\mathbf{X}\}$ 式（6）；ただし，右辺の $\{d\mathbf{X}\}$ は，前ステップにおける収束解からの変動量である。

3．解説

弧長法を含む多くの解析では，接線剛性行列である $[\mathbf{f}^{(n+1)}]$ のみ使用されるが，本法では荷重変数を何ら特別扱いすることなく，他の変数（変位）と全く同様に扱い，$[\mathbf{f}^{(1)}]\sim[\mathbf{f}^{(n)}]$ まで全ての接線係数行列を計算に活用する。また弧長法は，荷重を変数として導入したことにより一本不足した条件式を，弧長制御式で補い，（n＋1）個の未知量を（n＋1）本の条件式で決めようとする発想である。これに対し本法は，あくまで解曲線の追跡をunder-determine 的な問題として，未知量の数が相対的に一本多いことを，逆にある一個の未知量を自由に規定し得る余裕として捉え，これを変数制御に使えることに注目する。本来，非線形方程式の解法は（n＋1）次元空間で，解曲線上にある特定の一点をおさえるのではなく，解軌道を連続的に追跡することを目標とするのであれば，基本的には，（n＋1）個のパラメータの間に存在するn個の関係さえわかればそれで充分である。この意味では本法は，数学的には簡潔で自然である。

変数制御については（図1），式（3）のなかの行列式の計算と，式（4）のなかで，第m番目の変数を制御するわけであるが，これは前ステップにおいて使用した解曲線の接線ベクトルについて，そのベクトル成分のなかで絶対値最大であった成分を記憶しておき，これを制御する。すなわち，接線ベクトルと第m番目の変数に対応する座標軸とが，もっとも平行に近くなる。これは絶対値の小さいベクトル成分は，次のステップで符号が逆転することはあっても（すなわち，現在の着目点付近で，その変数の折返し点がある），絶対値最大となるベクトル成分の符号は変わらないとゆうことに注目している。もっとも強いベクトル成分をつかまえて，現在向いている方向に，そのまま増分してやれば，向きと大きさの両方を制御でき，これまで追跡してきた解曲線を後戻りすることはない。この結果，解曲線の形状に応じて制御変数は逐次異なることになるが，最適な変数を制御していることになる。図1に，積分過程の矢印と反復過程の波線をもって，これを概念的に示した。この制御法は終始同一の変位を制御する通常の変位増分法と大きく異なる点である。

4．計算例

図２に骨組構造系のsnap-backの例を計算してみた。支配方程式の定式化は文献4)による。まず，有限変位理論における区間伝達行列を誘導したあと，これを剛性行列に変換して解析した。つり合い経路全体としては，snap-throughを示すが，局所的に変位の戻り（荷重の増加に対して）がみられる。このような現象は，単純に変位δを制御しては，見逃してしまうか，解析不能となるかのいずれかである。本法のような変数制御法では何ら問題なく，これを追跡できた。

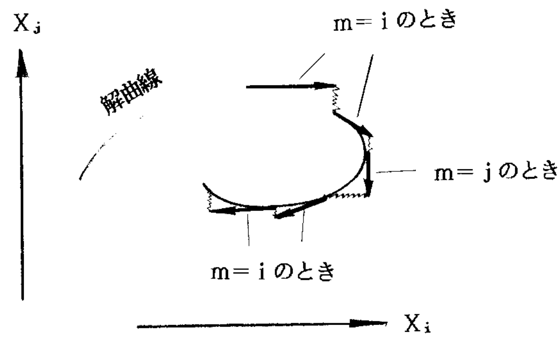

図１　変数制御の方法

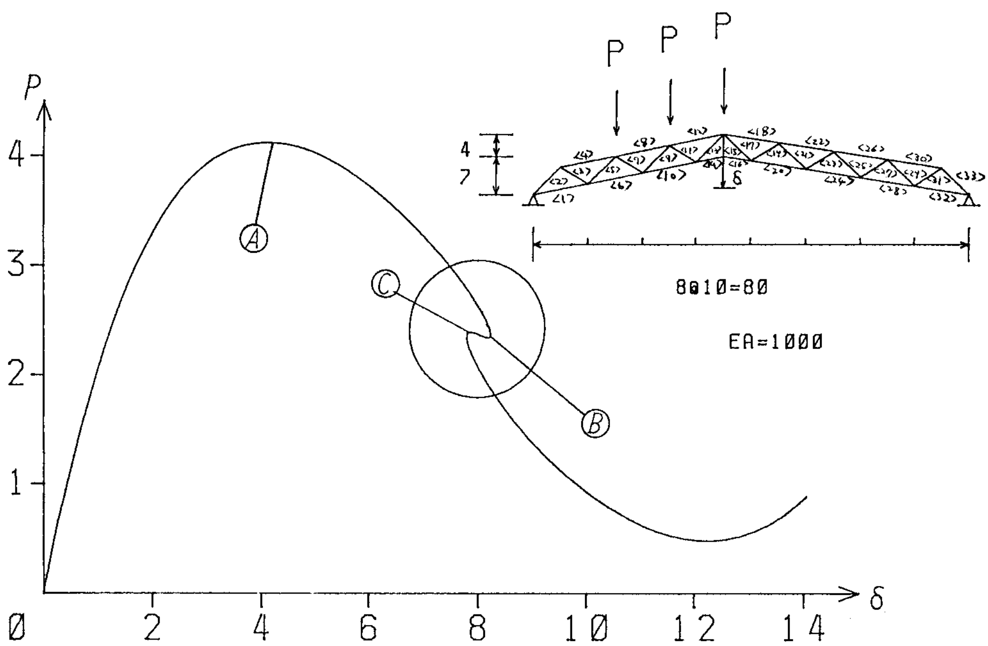

図２　つり合い経路

5．あとがき

その他の例題についても，snap-back を含む構造系のつり合い経路を安定に追跡することができた。分岐点付近でも，分岐点の位置の検出と，分岐方向の探索については，本法はかなり有望な計算ストラテジーとなりうることが期待される。

参考文献　〔1〕藤井文夫・今井康幸，『アーチのルーピングつり合い曲線の追跡に見る篠原法について』，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第１２巻，１９８８年７月，〔2〕藤井文夫　『非線形増分方程式の解法のための篠原法について』，構造工学論文集，Vol.35A，１９８９年３月，pp.195～202　〔3〕Fujii, F.,"A scheme for elasticas with snap-back and looping"，EM，Proc. of ASCE，1989，(to be published)　〔4〕Fujii, F. and S.-X. Gong, "Field transfer matrix for nonlinear curved beams", ST, Proc. of ASCE., No.3, 1988