

I-4 混合型変分原理による曲線部材の有限変位解析

長岡技術科学大学大学院 学生会員 岩崎英治
長岡技術科学大学建設系 正会員 林 正

1. まえがき

本報告では、部材内部の変位と断面力を独立な変関数として扱い、これらの間の拘束条件をLagrangeの未定乗数を用いて、ポテンシャルエネルギーに含めた汎関数の変分問題として曲線部材の有限変位解析を行う。変位関数には、曲線座標系で定義された変位成分の共変導関数を2次式で表し、断面力については増分変位が無限小な場合の平衡方程式の解を用いる。

2. 混合型変分原理

図-1のような曲線長 l の部材 x が変位後に部材 x^n になり、この部材軸上の点の接線の固定座標 X からの角を Θ^n 、曲率を $\kappa^n (= \Theta^n_{,1})$ 、この状態からの変位増分 Δu の接線と法線方向成分を Δu , Δw 、回転角の増分を $\Delta \theta$ とする。また、このとき生じている軸力と曲げモーメントを N^n , M^n 、これらの増分を ΔN , ΔM とする。

増分量によるポテンシャルエネルギー Π は次式のように表せる。

$$\Pi_0 = \int_0^l (N^n \Delta \varepsilon + M^n \Delta \theta_{,1}) dx + \frac{1}{2} \int_0^l (\Delta N \Delta \varepsilon + \Delta M \Delta \theta_{,1}) dx - \left[\bar{n}_x \{ (\bar{N}^n + \Delta \bar{N}) \Delta u + (\bar{Q}^n + \Delta \bar{Q}) \Delta w + (\bar{M}^n + \Delta \bar{M}) \Delta \theta \} \right]_0^l \quad (1)$$

ここに、 $(\cdot)_{,1}$ は x に関する微分、 $\bar{n}_x$ は $x=0$ で-1, $x=l$ で1の値をとり、 $\bar{N}^n, \Delta \bar{N}, \bar{Q}^n, \Delta \bar{Q}, \bar{M}^n, \Delta \bar{M}$ は部材端に作用している外力を表し、伸び率 $\Delta \varepsilon$ 、回転角 $\Delta \theta$ は増分量の2次項まで考慮すると次式のようになる。

$$\Delta \varepsilon = (1 + \varepsilon^n) \left\{ \Delta \hat{t}_1 + \frac{1}{2} (\Delta \hat{t}_3)^2 \right\}, \quad \Delta \theta = -\Delta \hat{t}_3 (1 - \Delta \hat{t}_1), \quad \Delta \hat{t}_i = \frac{\Delta t_i}{1 + \varepsilon^n} \quad (2)$$

$$\Delta t_1 = \Delta u_{,1} + \kappa^n \Delta w, \quad \Delta t_3 = \Delta w_{,1} - \kappa^n \Delta u$$

また、断面力 $\Delta N, \Delta M$ は $\Delta \varepsilon, \Delta \theta$ と伸び剛性 EA 、曲げ剛性 EI から次式のように関係付けられる。

$$\Delta N = EA \Delta \varepsilon, \quad \Delta M = EI \Delta \theta_{,1} \quad (3)$$

いま、断面力 $\Delta N, \Delta M$ と伸び率、回転角 $\Delta \varepsilon, \Delta \theta$ を独立な関数として扱い、式(3)をLagrangeの未定乗数により式(1)に含めた汎関数を考えると、この汎関数の停留条件より、未定乗数を消去すると次のような汎関数 Π_1 が得られる。

$$\Pi_1 = -\frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \frac{(\Delta N)^2}{EA} + \frac{(\Delta M)^2}{EI} \right\} dx + \int_0^l \{ (N^n + \Delta N) \Delta \varepsilon + (M^n + \Delta M) \Delta \theta_{,1} \} dx - \left[\bar{n}_x \{ (\bar{N}^n + \Delta \bar{N}) \Delta u + (\bar{Q}^n + \Delta \bar{Q}) \Delta w + (\bar{M}^n + \Delta \bar{M}) \Delta \theta \} \right]_0^l \quad (4)$$

上式において、変分をうける独立な関数は $\Delta u, \Delta w, \Delta N, \Delta M$ である。

3. 断面力と変位関数

断面力は次式を満足する関数で表すことにする。

$$(N^n + \Delta N)_{,1} + \kappa^n \frac{(M^n + \Delta M)_{,1}}{1 + \varepsilon^n} = 0, \quad \left\{ \frac{(M^n + \Delta M)_{,1}}{1 + \varepsilon^n} \right\}_{,1} - \kappa^n (N^n + \Delta N) = 0 \quad (5)$$

上式は、部材 x^n の状態からの変形を無限小とした場合の平衡方程式を表し、この解は次式のようになる。

$$N^n + \Delta N = f_N^T (c^n + \Delta c), \quad M^n + \Delta M = f_M^T (c^n + \Delta c) \quad (6)$$

ここに、 $c^n + \Delta c$ は積分定数、 f_N, f_M は部材 x^n の形状から決定され次式のようになる。

$$f_N = \{ \cos \Theta^n, -\sin \Theta^n, 0 \}^T, \quad f_M = \left\{ \int_0^x \sin \Theta^n (1 + \varepsilon^n) dx, \int_0^x \cos \Theta^n (1 + \varepsilon^n) dx, 1 \right\}^T \quad (7)$$

なお、 N^n, M^n と $f_N^T c^n, f_M^T c^n$ の差が不平衡力を表す。

部材内の変位については、共変導関数 $\Delta t_1, \Delta t_3$ を次のように、2次式で表すことにする。

$$\Delta t_1 = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2, \quad \Delta t_3 = b_1 + b_2 \xi + b_3 \xi^2 \quad (8)$$

ここに、 a_1, b_1 は未定係数であり、 ξ は $x=0$ に原点を置き、 $x=l$ で1になる正規座標である。

式(8)の係数 a_1, a_2, b_1, b_2 を部材端の変位で表し、式から消去すると、

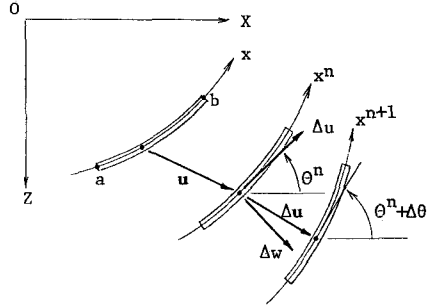


図-1 曲線部材の変位

$$\Delta t_1 = N_1 \Delta t_{1a} + N_2 \Delta t_{1b} + N_3 a_3, \quad \Delta t_3 = N_1 \Delta t_{3a} + N_2 \Delta t_{3b} + N_3 b_3 \quad (9)$$

ここに、 $N_1 = 1 - \xi$, $N_2 = \xi$, $N_3 = \xi^2 - \xi$ とわっている。

残りの係数 a_3 , b_3 は、上式を式(2)の第4, 5式に代入して部材全体にわたって積分すると次式のように節点変位で表される。

$$\begin{aligned} a_3 &= (-\bar{C}_a \Delta u_a - \bar{S}_a \Delta w_a + \bar{C}_b \Delta u_b + \bar{S}_b \Delta w_b) / \ell - \bar{S}_1 \Delta t_{3a} - \bar{C}_1 \Delta t_{1a} - \bar{S}_2 \Delta t_{3b} - \bar{C}_2 \Delta t_{1b} \\ b_3 &= (\bar{S}_a \Delta u_a - \bar{C}_a \Delta w_a - \bar{S}_b \Delta u_b + \bar{C}_b \Delta w_b) / \ell - \bar{C}_1 \Delta t_{3a} + \bar{S}_1 \Delta t_{1a} - \bar{C}_2 \Delta t_{3b} + \bar{S}_2 \Delta t_{1b} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \bar{C}_i &= (C_3 C_i + S_3 S_i) / (C_3^2 + S_3^2), \quad \bar{S}_i = (C_3 S_i + S_3 C_i) / (C_3^2 + S_3^2) \quad (i=a, b, 1, 2) \\ C_a &= \cos \Theta_a, \quad C_b = \cos \Theta_b, \quad S_a = \sin \Theta_a, \quad S_b = \sin \Theta_b, \quad C_i = \int_0^1 N_i \cos \Theta d\xi, \quad S_i = \int_0^1 N_i \sin \Theta d\xi \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned}$$

また、式(2)の第1, 2式を Δt_1 , Δt_3 について解き、増分量の3次以上の項を省略すると

$$\Delta t_1 = \Delta \varepsilon - \frac{1}{2}(1 + \varepsilon^n) \Delta \theta^2, \quad \Delta t_3 = -(1 + \varepsilon^n + \Delta \varepsilon) \Delta \theta \quad (11)$$

式(9)に式(10), (11)を代入してまとめると次のように表現できる。

$$\Delta t_i = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{d} + \tilde{\mathbf{f}}_i^T \Delta \tilde{\mathbf{d}}) + \frac{1}{2\ell}(\mathbf{F}_i \Delta \mathbf{d} + 2\tilde{\mathbf{F}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}})^T \Delta \mathbf{d} \quad (i=1, 3) \quad (12)$$

ここに、 $\Delta \mathbf{d}$, $\Delta \tilde{\mathbf{d}}$ は部材端変位を表し、 $\mathbf{f}_i$, $\tilde{\mathbf{f}}_i$, $\mathbf{F}_i$, $\tilde{\mathbf{F}}_i$ は部材 x^n の形状から決まる関数である。

$$\Delta \mathbf{d} = \{\Delta u_a, \Delta w_a, \Delta \theta_a, \Delta u_b, \Delta w_b, \Delta \theta_b\}^T, \quad \Delta \tilde{\mathbf{d}} = \{\Delta \varepsilon_a, \Delta \varepsilon_b\}^T$$

4. 平衡方程式

式(4)に式(6), (12), (2)を代入して第一変分を求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1 &= \delta(\Delta \mathbf{c})^T \{-\mathbf{H}(\mathbf{c}^n + \Delta \mathbf{c}) + \mathbf{G} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{s}^n\} + \delta(\Delta \tilde{\mathbf{d}})^T \{\tilde{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{d} + \tilde{\mathbf{K}} \Delta \tilde{\mathbf{d}}\} \\ &\quad + \delta(\Delta \mathbf{d})^T \{\mathbf{G}^T(\mathbf{c}^n + \Delta \mathbf{c}) + \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} + \tilde{\mathbf{K}}^T \Delta \tilde{\mathbf{d}} - (\mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p})\} \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、 $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$, $\tilde{\mathbf{K}}$, $\mathbf{s}^n$, $\mathbf{p}^n$, $\Delta \mathbf{p}$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int_0^\ell \left[\frac{\mathbf{f}_n \mathbf{f}_n^T}{EA} + \frac{\tilde{\mathbf{f}}_n \tilde{\mathbf{f}}_n^T}{EI} \right] dx, \quad \mathbf{G} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \left[\mathbf{f}_n \mathbf{f}_1^T + \frac{\mathbf{f}_{n+1} \mathbf{f}_3^T}{1 + \varepsilon^n} \right] dx - \frac{1}{\ell} [\mathbf{f}_n \mathbf{f}_3^T]_0^\ell \\ \mathbf{K} &= \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \left[N^n \mathbf{f}_3 \mathbf{f}_3^T - \frac{M_{n+1}^n}{1 + \varepsilon^n} (\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_3^T + \mathbf{f}_3 \mathbf{f}_1^T) \right] \frac{dx}{1 + \varepsilon^n}, \quad \mathbf{s}^n = \int_0^\ell \left[\frac{N^n}{EA} \mathbf{f}_n + \frac{M^n}{EI} \tilde{\mathbf{f}}_n \right] dx \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \left[N^n \tilde{\mathbf{f}}_3 \mathbf{f}_3^T - \frac{M_{n+1}^n}{1 + \varepsilon^n} (\tilde{\mathbf{f}}_1 \mathbf{f}_3^T + \tilde{\mathbf{f}}_3 \mathbf{f}_1^T) \right] \frac{dx}{1 + \varepsilon^n}, \quad \mathbf{p}^n = \{N_a^n, Q_a^n, M_a^n, N_b^n, Q_b^n, M_b^n\}^T \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \left[N^n \tilde{\mathbf{f}}_3 \tilde{\mathbf{f}}_3^T - \frac{M_{n+1}^n}{1 + \varepsilon^n} (\tilde{\mathbf{f}}_1 \tilde{\mathbf{f}}_3^T + \tilde{\mathbf{f}}_3 \tilde{\mathbf{f}}_1^T) \right] \frac{dx}{1 + \varepsilon^n}, \quad \Delta \mathbf{p} = \{\Delta N_a, \Delta Q_a, \Delta M_a, \Delta N_b, \Delta Q_b, \Delta M_b\}^T \end{aligned}$$

式(13)の $\mathbf{c}^n + \Delta \mathbf{c}$ と $\Delta \tilde{\mathbf{d}}$ は、隣接する部材間で適合させる必要がないので、各部材での平衡方程式の誘導の際に消去することにする。 $\mathbf{c}^n + \Delta \mathbf{c}$ は式(13)の停留条件より次のように求められる。

$$\mathbf{c}^n + \Delta \mathbf{c} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{G} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{s}^n) \quad (14)$$

$\Delta \tilde{\mathbf{d}}$ については、 $\tilde{\mathbf{K}}$ が一般に正則であることの保証がないので、式(3)の関係をを用いる。

$$\Delta \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{A}(\mathbf{c}^n + \Delta \mathbf{c}) - \tilde{\mathbf{d}}^n, \quad \delta(\Delta \tilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{A} \delta(\Delta \mathbf{c}) \quad (15)$$

ここに、

$$\mathbf{A} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} C_a & -S_a & 0 \\ C_b & -S_b & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{d}}^n = \begin{pmatrix} \varepsilon_a \\ \varepsilon_b \end{pmatrix}$$

式(14), (15)を式(13)に代入すると、停留条件として次の平衡方程式を得る。

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G) \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{p} + (\mathbf{p}^n - \mathbf{f}^n) \quad (16)$$

ここに、 $\mathbf{K}_L$, $\mathbf{K}_G$ は線形、幾何剛性行列、 $\mathbf{f}^n$ は断面力ベクトルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L &= \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}, \quad \mathbf{K}_G = \mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}^T \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{f}^n = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{s}^n + \tilde{\mathbf{K}}^T \hat{\mathbf{s}}^n + \hat{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{s}}^n \\ \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}, \quad \hat{\mathbf{s}}^n = \mathbf{A} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{s}^n - \tilde{\mathbf{d}}^n \end{aligned}$$

5. あとがき

計算例は、当日発表するが線形解析では、式(12)を式(1)に代入した場合に比べて、式(16)を用いた方が変位と断面力の両方共に精度がよく、有限変位解析の場合には有限変位後の状態での部材の形状が変位関数によるために変位の精度はこれらの方法にあまり差が無いが、部材内の断面力分布については前者の方法では変位に比べて精度が低下し、後者の方法では変位と同程度の精度が得られた。なお、本文で用いた変位関数は文献1)に示されている変位関数と同様に、変位に関しては極めて精度のよい関数である。

1) 倉方慶夫・高橋真太郎：土木学会第41回年次学術講演会講演概要集，I-57, 1986。