

I-3 膜構造の静的非線形解析について

大同工業大学 正会員 水沢 富作
オレゴン州立大学 J.W. Leonard

1 はじめに 膜構造はケーブルと共にTension構造¹⁾と呼ばれ、大型の利用空間を作り出すテントやドーム、飛行船、消波用及びエネルギー備蓄用海洋構造物など仮設構造や常設構造として広く用いられている。膜構造は、曲げや圧縮に抵抗する曲面構造と異なり、封じ込められた空気や流体による圧力により安定した構造形状が作り出される。また、人工血管や臓器開発などの生体力学分野でも用いられている。また、このような膜は、その形状を保つため、または曲げ荷重により生じる応力を低減するために、ケーブルで補強される場合も多くみられる。膜構造では、その厚さが非常に薄く、曲げや圧縮剛性が無視され、面内引張り応力と面内せん断応力のみに抵抗する構造物である。また、圧力の導入前と変形後でその形状がかなり異なり、また外力の作用によってもその形状が大きく変形する。このような膜構造の解析過程は、一般に3つに分けられる。すなわち、i)初期ひずみを受けない幾何形状問題、ii)初期圧力の導入による初期つり合い形状を求める形状決定問題、iii)得られたつり合い形状での静的及び動的問題である。また膜の構造解析では、次のような非線形性を考慮しなければならない。(1)幾何学的非線形、(2)超弾性のような材料学的非線形、(3)導入される圧力や潮流などによる非線形流体坑力(非保存力問題)、(4)圧縮応力による面内剛性の低下(Wrinke問題)が挙げられる。一方、このような膜構造問題は、古くから解析的手法や種々の数値解析法により解かれてきている。Rivlinら²⁾による弾性及び超弾性膜問題の解析的研究、またOdenらの三角形要素による研究²⁾、VermaとLeonardら³⁾によるSuper-parametric要素モデルを用いたシェル膜の解析が挙げられる。これらの研究では、高次の非線形方程式を解くために、Newton-Raphson法や増分・反復法が用いられている。本研究では、有限要素法を用いて、このようなシェル膜の静的非線形解析について検討している。3次元有限変位弾性理論、Total Lagrangian表現、Greenのひずみテンソル・Kirchhoffの応力テンソル及び仮想仕事の原理に基づき、任意形状の膜要素の非線形基礎方程式を導いている。また、得られた非線形方程式を解くために、先に著者らが、海洋ケーブル問題で適用したViscous Relaxation法を用いている。本手法の有用性を示すために、種々の荷重を受ける平面膜やシェル膜を解き、解の精度や数値解析上の問題点について述べる。また、ケーブルで補強された膜構造の力学性状についても検討している。

2 式の定式化 3次元有限変位弾性理論⁴⁾に基づき、膜要素の基礎方程式を導いている。ここで、次の解析仮定を設ける。(1)膜の厚さは非常に薄く、曲げ剛性は無視する。(2)面内引張り応力とせん断応力のみに抵抗し、面内圧縮応力には抵抗しない。(3)変位とひずみの大きさには制限を設けない。(4)Total Lagrangian表現を用いる。(5)超弾性材料も考慮する。(6)テンソル表現と曲線座標により定式化を行う。

2.1 等方性弾性材料の構成式 線形弾性材料の構成式は、次式で与えられる。

$\tau^{ab} = C^{abcd} \gamma_{cd} \dots (1)$ ただし、 $C^{abcd} = E\nu/(1+\nu)/(1-2\nu) \alpha^{ab} \beta^{cd} + E/2/(1+\nu) (\alpha^{ac} \alpha^{bd} + \alpha^{ad} \alpha^{bc})$; $a, b, c, d=1, 2$ である。 τ^{ab} はKirchhoffの応力テンソル、 γ^{cd} はGreenのひずみテンソルを示す。 E は弾性係数、 ν はPoisson比であり、 α^{ab} は共反計量テンソルを示す。一方、Mooney-Rivlin材のような超弾性材の応力テンソルは、ひずみエネルギー関数より、 $\tau^{ab} = 2\alpha^{ab} [C1 + C2(I_1 - \lambda^2)] + 2A^{ab} \{C2A/\alpha - \lambda^2 [C1 + C2(I_1 - \lambda^2)]\} \dots (2)$ で与えられる。ここで、 $\lambda = h_0/h$ は厚さの伸び比、 I_1, I_2 はひずみ変量であり、 $C1$ と $C2$ は材料定数である。 $\alpha = \det | \alpha_{ab} |$, $A = \det | A_{ab} |$; $a, b=1, 2$ である。

2.2 Isoparametric膜要素 座標関数と変位関数に同じ形状関数、 $M^i(\xi_1, \xi_2)$ を用いれば、 $X_i(\xi_1, \xi_2) = M^i(\xi_1, \xi_2) X_i^1$, $u_i(\xi_1, \xi_2) = M^i(\xi_1, \xi_2) u_i^1$; $i=1, \dots, N \dots (3)$ で与えられる。ここで、 X_i, u_i は、曲線座標系 (ξ_1, ξ_2) での要素の節点座標と変位を示す。 N は要素の節点数である。したがって、仮想仕事の原理より求められる要素の剛性方程式は、次式で与えられる。

$$\iint (1/2) \tau^{ab} (M^J_{,a} M^J_{,b} + M^I_{,a} M^I_{,b}) (X^J_i + u^J_i) h_0 \sqrt{\alpha} d\xi_1 d\xi_2 \\ - \iint \rho_0 b_{0i} h_0 M^I \sqrt{\alpha} d\xi_1 d\xi_2 - \iint t_{0i} M^I \sqrt{\alpha} d\xi_1 d\xi_2 = 0; a, b=1, 2, i=1, 2, 3 \quad (4)$$

ここで、第一項は内力の仕事、第二項及び第三項は、それぞれ物体力(b_{0i})と表面力(t_{0i})による仕事である。 h_0 は初期厚さ、 ρ_0 は密度である。ただし、 t_{0i} は膜要素の変形後の形状(要素面積や方向)に依存する。ここで、膜要素の中央面に常に垂直に作用する圧力を、 $p=p(\xi_1, \xi_2)$ とすれば、

$t_{0i} = \sqrt{(A/\alpha)} p (A_3 \cdot e_i) = 1/\sqrt{\alpha} p [(A_1 \times A_2) \cdot e_i]; i=1, 2, 3 \quad (5)$ で与えられる。ただし、 e_i は直交座標系での単位ベクトル、 A_i は、曲線座標系での直交ベクトルである。

したがって、式(4)を全要素について重ね合わせれば、全体剛性方程式が得られる。この式は、幾何学的非線形性、材料学的非線形性や非保存力を含む高次の非線形方程式になる。

2.3 非線形方程式の解法 ここでは、著者ら⁶⁾がケーブル問題の非線形解析で用いた、Viscous Relaxation法を用いて解いている。この手法は、Webster(1980)⁵⁾により提案されたもので、仮想的な減衰項を全体剛性方程式に付加し、数値積分法とNewton-Raphson法を組合せた準動的解法である。すなわち、得られる接線剛性Matrixを解く場合に問題を含むとき、これに仮想減衰Matrixを付加すれば数値安定性が得られる。

3 数値計算例及び考察

本手法の有用性を示すために、厳密解や数値解との比較検討を行った。面内剛性の過大評価を避けるために低減積分を考慮している。本手法の精度を確認するために、等分布荷重を受ける正方形弾性膜の最大変位と引張応力を計算した。得られた値を、Timoshenkoの

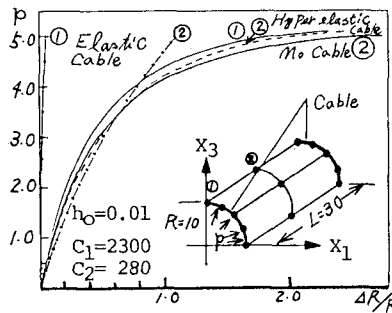


Fig. 2 Pressure & deformations of cylinder with cables

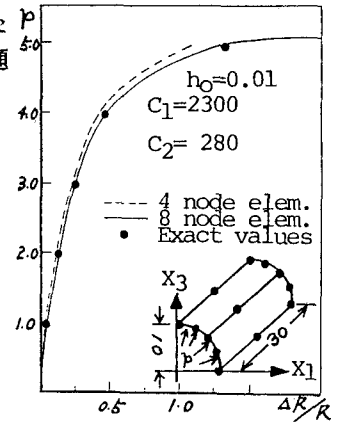


Fig. 1 Pressure and deformations

近似解と比較し、良く一致した結果が得られている。

Fig.1には、一様な内圧で膨らませられた超弾性材より成る円筒膜の変形状や応力性状が示されている。対称性より、1/4のみ8つの4節点要素よ2つの8節点要素で離散化した。また、Greenら⁴⁾により示されている厳密解も示してある。これより、高次要素の有用性が示され、また解析解と良く一致した結果が得られた。Fig. 2は、円筒膜の両端を、弾性cableまたは超弾性cableで補強した場合の変形状を示す。これより、超弾性材を用いると、ある内圧レベルになると、超弾性材特有の軟化性状(急激な剛性低下)が生じ、大きなひずみの増大が見られる。Fig.3には、膨らまされた円筒膜に自重や集中荷重な作用した場合の変形状が示されている。特に、自重が作用する場合に、顕著な非線形性状が見られる。本研究は、海洋環境下での膜構造の動力挙動解析のための基礎研究である。なお、本研究の一部は、科研費(海外学術研究)の援助を受けている。参考文献 1) Leonard, J.W.: Tension Structures. McGraw-Hill, 1987. 2) Oden, J.T.: Finite elementsof nonlinear continua. Macgraw-Hill, 1972. 3) Verma, V.K. and Leonard, J.W.: ASCE, Vol. 104, EM4, 1978. 4) Green, A.E. et al: Large elastic deformations. Clarendon Press, 1954. 5) Webster, R.L.: Compt. Struct. vol. 11, 1980. 6) 水沢他: 中部支部研究発表概要集, 1-19, 1989.

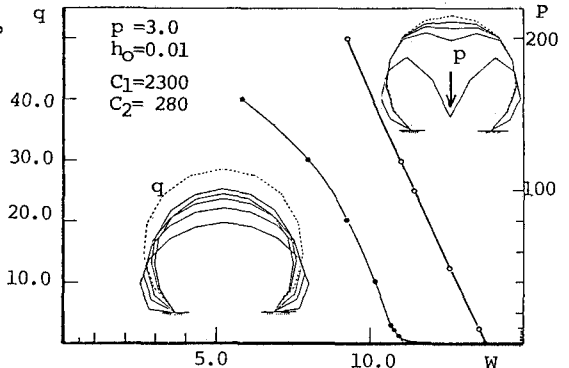


Fig. 3 Deformation of membrane shell to gravity load, q and concentrated load, P

膨らまされた円筒膜に自重や集中荷重な作用した場合の変形状が示されている。特に、自重が作用する場合に、顕著な非線形性状が見られる。本研究は、海洋環境下での膜構造の動力挙動解析のための基礎研究である。なお、本研究の一部は、科研費(海外学術研究)の援助を受けている。参考文献 1) Leonard, J.W.: Tension Structures. McGraw-Hill, 1987. 2) Oden, J.T.: Finite elementsof nonlinear continua. Macgraw-Hill, 1972. 3) Verma, V.K. and Leonard, J.W.: ASCE, Vol. 104, EM4, 1978. 4) Green, A.E. et al: Large elastic deformations. Clarendon Press, 1954. 5) Webster, R.L.: Compt. Struct. vol. 11, 1980. 6) 水沢他: 中部支部研究発表概要集, 1-19, 1989.