

I-2

変位法ケーブル構造系のつり合いに関する繰返計算法

法政大学 正会員 ○阿井 正博
 東京大学 正会員 西野 文雄

1. はじめに

各ケーブルを引張直線部材とする変位法ケーブル構造モデルの実用性は十分認められているが、その非線形基礎式をつり合いに関して解く際には構造中の不安定機構や部材の弛緩による特異状態の問題が生じる。ここでは、ケーブル構造の正則/特異状態に適合させた一つの改良Newton-Raphson法を提案している。

2. ケーブル構造の正則、特異および限界状態

〔一要素の上で〕空間に直行デカルト座標 $\{x, y, z\}$ の上での始端 i と終端 j での空間座標 $x_{i,j} = \{x, y, z\}$ を用いて、直線ケーブル (m) の要素形状を

$$\bar{x}_{(m)} = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}_{(m)} = \{x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i\} \dots (1)$$

と表す。EA = 伸び剛性、 $\bar{L}$ = 初期長として、張力空間成分 $\bar{T}_{(m)} = \{\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z\}_{(m)} = \{T_x, T_y, T_z\}_j - \{T_x, T_y, T_z\}_i$ との間の接線剛性マトリックス $[\bar{k}(\bar{x}_{(m)})]_{(m)}$ は、 $\bar{L} \geq \bar{L}$ の範囲で

$$[\bar{k}]_{(m)} = [\bar{k}_H]_{(m)} + [\bar{k}_G]_{(m)} \dots (2)$$

$$[\bar{k}_H]_{(m)} = \frac{EA}{\bar{L} \bar{L}^2} \begin{bmatrix} \bar{x}\bar{x} & \bar{x}\bar{y} & \bar{x}\bar{z} \\ \bar{y}\bar{y} & \bar{y}\bar{z} \\ \text{sym.} & \bar{z}\bar{z} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{k}_G]_{(m)} = \frac{T}{\bar{L}^3} \begin{bmatrix} \bar{L}^2 - \bar{x}\bar{x} & -\bar{x}\bar{y} & -\bar{x}\bar{z} \\ \bar{L}^2 - \bar{y}\bar{y} & -\bar{y}\bar{z} \\ \text{sym.} & \bar{L}^2 - \bar{z}\bar{z} \end{bmatrix} \dots (3. a, b)$$

と展開される ($\bar{L} < \bar{L}$ では、 $[\bar{k}]_{(m)} = [0]$)。ただし、 $\bar{L}$ は伸び後の要素長さを、 T は要素の張力をそれぞれ表す。

接線剛性 (3. a, b) の2次形式 $\delta^2 I_{(m)} = \delta \bar{x}_{(m)}^T [\bar{k}]_{(m)} \delta \bar{x}_{(m)}$ は、構成式を代入して

$$\delta^2 I_{(m)} = \begin{cases} \frac{EA}{\bar{L}^3} (\bar{x} \delta \bar{x} + \bar{y} \delta \bar{y} + \bar{z} \delta \bar{z})^2 + \frac{T}{\bar{L}} (\delta \bar{x}^2 + \delta \bar{y}^2 + \delta \bar{z}^2) & \text{for } \bar{L} \geq \bar{L} \\ 0 & \text{for } \bar{L} < \bar{L} \end{cases} \dots (4)$$

と整理することができる。これより、 $\bar{L} > \bar{L}$ ($T > 0$) となる $\bar{x}_{(m)}$ の開領域では、 $[\bar{k}]_{(m)}$ は正値となる (張力要素とよぶ)。 $\bar{L} = \bar{L}$ の状態では、 $\delta \bar{L}_{(m)} = (\bar{x} \delta \bar{x} + \bar{y} \delta \bar{y} + \bar{z} \delta \bar{z})_{(m)} = 0$ となる $\delta \bar{x}_{(m)}$ で $\delta^2 I_{(m)} = 0$ となり、 $[\bar{k}]_{(m)}$ は半正値といえる (限界要素)。また、 $\bar{L} < \bar{L}$ では、任意の $\delta \bar{x}_{(m)}$ に対して $\delta^2 I_{(m)} = 0$ となる (弛緩要素)。

〔構造系として〕構造の自由節点の全自由度 $\{x_j\}$ と対応する節点力 $\{F_j(\{x_j\})\}$ の間の接線剛性を $[K_j(\{x_j\})]$ として、その2次形式 $\delta^2 I = \delta \{x_j\}^T [K_j] \delta \{x_j\}$ を考えると、節点位置の微小変化 $\delta \{x_j\}$ により生ずる各要素形状の変化 $\delta \bar{x}_{(m)}$ に対する式 (4) の2次形式 $\delta^2 I_{(m)}$ を用いて

$$\delta^2 I = \sum_{m=1}^M \delta^2 I_{(m)} \geq 0 \dots (5)$$

と展開できる [文献2])。ここで、次の状態を考える。

(A): すべての自由節点が、引張力が生じている一連の要素をたどって、少なくとも各1つの支持節点にアンカーされている状態。

この状態で、任意の非零の $\delta \{x_j\}$ に対する式 (5) を考える。 $\delta \{x_j\}$ の中より非零の δx_j をとり、その節点 j を前述の意味でアンカーしている1組の要素 $\{m\}$ を考える。これら1連の要素の他端は支持節点に固定されており、先端の微小変位 δx_j に対して $\{m\}$ の中の少なくとも1要素で $\delta \bar{x}_{(m)} \neq 0$ となることは明かであり、 $\delta^2 I_{(m)} > 0$ となる。これより、式 (5) は正値 $\delta^2 I > 0$ であり、(A) は正則状態の条件を表している。

(A) の状態にない場合を考える。互いに張力要素で連結されている自由節点の組 $\{j'\}$ (単独の節点 j' の場合も含む) があり、それらの節点を外に連結している要素 (境界要素) がすべて弛緩していれば、 $\{j'\}$ 全体の任意の剛体的並進 $\delta x_{(j')}$ に対して $\delta^2 I = 0$ は明かであり、ケーブル構造としての特異状態といえる。正則でも特異状態でもなく、前述の境界要素の中に限界要素 $\{m'\}$ が含まれる場合として限界状態が定義できる。このとき、限界要素 $\{m'\}$ に対する不等式 $\delta \bar{L}_{(m')} = (\bar{x} \delta \bar{x} + \bar{y} \delta \bar{y} + \bar{z} \delta \bar{z})_{(m')} \leq 0$ は、 $\delta x_{(j')}$ の線形空間で凸多面錐を規定するが、式 (5) の2次形式はその内側と側面上の $\delta x_{(j')}$ に対しては零となる。

正則と特異領域の境界面として特異状態が広がっており、その両側で接線剛性 $[K_j(\{x_j\})]$ は異なり、境界状態では先の凸多面錐の内向きと外向きに対して別々の接線剛性があると考えてよい。しかし、境界面で節点力は連続しており、これら2つの剛性は境界の接面方向 (凸多面錐の側面方向) には連続している。すなわち、両方とも零になる。節点位置 $\{x_j\}$ を正則側から境界状態に近ずけると、正則な接線剛性 $[K_j]$ は、その境界面の接面方向に特異なマトリックスとなる。

節点外力を $\{P_j\}$ として、 $\delta W = (\{F_j\} - \{P_j\})^T \delta \{x_j\}$ の積分としての全ポテンシャル

$$W(\{x_j\}) = \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{2} T \Delta \bar{L}_{(m)} \right) - \{P_j\}^T \{x_j\} \dots (6)$$

は、(A) の正則領域で接線剛性 $[K_j]$ が正値であり、それ以外でも負値とはならないことより、 $\{x_j\}$ の全領域で半凸関数となる。外力 $\{P_j\}$ につり合う $\{x_j\}$ が条件 (A) を満たすとき、それは正則安定な唯一のつり合い状態であり、その W は $\{x_j\}$ の全領域での絶対最小値となる。また、 $\{x_j\}$ が (A) を満たさないときでも、部材の弛緩の範囲で他のつり合いの $\{x_j\}$ が考えられるが、その W は絶対最小値である。

3. 部分修正による繰返し計算

正則凸ポテンシャルの極値問題に対して提案されている部分修正法 [文献1]) を、ここでの特異領域のある半凸ポテンシャル問題に対して、次のように変形し

て適用する：

つり合い条件 $\{F_j\} = \{P_j\}$ を満たす節点位置 $\{x_j\}^E$ を求めるために、回数 $[i]$ での不釣り合い $\Delta\{F_j\}_{[i]}$ と接線剛性 $[K_j]_{[i]}$ に対して、不釣り合い全体ではなく、その一部 $\theta_{[i]} \Delta\{F_j\}_{[i]}$ ($0 < \theta_{[i]} \leq 1$) のみを $[K_j]_{[i]}$ の上で

$$\{x_j\}_{[i+1]} = \{x_j\}_{[i]} - \theta_{[i]} [K_j]_{[i]}^{-1} \Delta\{F_j\}_{[i]} \dots (7)$$

と修正する手順を考える。このとき、修正係数 $\theta_{[i]}$ は、 θ_0 ($0 < \theta_0 \leq 1$) をその初回値として選んだ後、不釣り合いをスカラー量

$$R_{[i]} = \sqrt{\Delta\{F_j\}^T [K_j]^{-1} \Delta\{F_j\}}_{[i]} \dots (8)$$

で評価しながら

$$\theta_{[i]} = \min. \left(\theta_0 \frac{R_{[0]}}{R_{[i]}}, 1 \right) \dots (9)$$

で決定する。すなわち、収束の初期段階 ($R_{[i]} > \theta_0 R_{[0]}$) では $\theta_{[i]} R_{[i]}$ が $[i]$ に関わらず一定となるように修正し、 $R_{[i]} \leq \theta_0 R_{[0]}$ 程度に収束が進めば $\theta_{[i]} = 1$ として一般のNewton-Raphson法で計算するものとしている。

このとき、収束傾向をみるための $W_{[i]} > W_{[i+1]}$ の他に、ここでは、 $\{x_j\}_{[i+1]}$ が特異領域に入っていないことを $\det. [K_j]_{[i+1]} \neq 0$ で毎回確認する。このいずれかを満たさない場合には、基本の係数 θ_0 がなお大きすぎるものとして、その十分でない $\theta_{[i]} \text{false}$ に対して新しい $\theta_{[i]}$ が半減するように

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \frac{R_{[i]}}{R_{[0]}} \theta_{[i] \text{false}} \dots (10)$$

と変更して、 $[i]$ 回目より計算をやり直すものとする。

$\{W_{[0]}, W_{[1]}, \dots\}$ は、下に有界な単調減少列 ($W_{[i]} > W_{[i+1]}$) となり、その収束がいはる。しかし、その収束先について、正則凸ポテンシャル問題では常に釣り合いの $\{x_j\}^E$ が得られるといえるが、ここでの半凸ポテンシャル問題では次の2通りが考えられる：

- I) θ_0 が(何回かの変更の後に)有限値にとどまった上で収束傾向が保持され、式(7)での修正量 $\theta_{[i]} \Delta\{F_j\}_{[i]}$ の $\Delta\{F_j\}_{[i]}$ が零に収束して、外力 $\{P_j\}$ に対する釣り合い位置 $\{x_j\}^E$ に収束する。
- II) 前述の理由による θ_0 の変更が連続して $\theta_0 \rightarrow 0$ となり、式(7)での修正量 $\theta_{[i]} \Delta\{F_j\}_{[i]}$ の中の $\theta_{[i]}$ が零に収束して、 $R_{[i+1]} - R_{[i]} \rightarrow 0$ とはなるが、 $R_{[i]}$ が零以外の有限値(不釣り合い状態)に収束する。

4. 解析例

Fig. 1に示す2部材ケーブル・トラスを考える。Fig. 2中のNo. 1は、外力 $\{10, -40\}$ [F] に対して $\{50, 60\}$ [L] を初期位置としたときの部分修正法 ($\theta_0 = 1$) での $\{F_j\} - \{x_j\}$ 過程を、その収束過程をFig. 3-(a)に示す。特異領域に入ることおよび $W_{[i]} < W_{[i+1]}$ となることによる θ_0 の変更がみられる。Fig. 2のNo. 2 およびFig. 3-(b)は、外力 $\{-40, 10\}$ に対して $\{120, -30\}$ の初期位置を与えたときの結果 ($\theta_0 = 1$) であるが、初期節点力と外力を結ぶ直線上に零節点力があり、その直線まわりで接線剛性が対称であることにより、II) の種類の特異領域の

表面(限界状態)への収束となっている。しかし、初期位置がそれよりわずかでも外れれば(No. 3)、特異領域を避けながら釣り合い状態へ収束することがみられる。

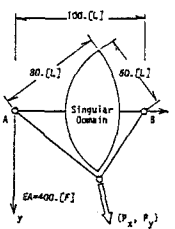


Fig. 1 2-Mem. Cable Truss

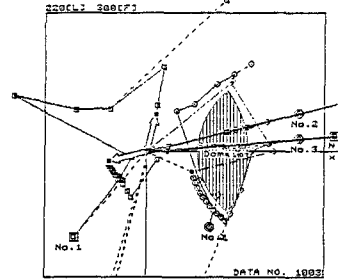
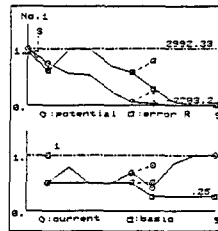
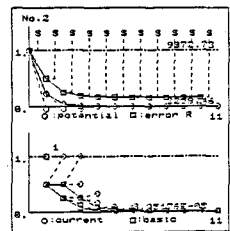


Fig. 2 Joint Force-Joint Position Process



(a) For Case No. 1



(b) For Case No. 2

Fig. 3 Error-Correction Ratio Process

5. 考察とまとめ

II) の種類の不釣り合い状態への収束について、次のように考察できる。

$\{x_j\}_{[i]}$ が正則領域内にあれば、十分小さい有限値の $\theta_{[i]}$ で式(7)の修正が正常、すなわち、 $W_{[i]} > W_{[i+1]}$ かつ $\{x_j\}_{[i+1]}$ が正則領域にとどまることは明かであり、II) の収束が正則領域内で生じることはない。また、 $\{x_j\}_{[i+1]}$ が特異領域に入るとは、式(10)による θ_0 の変更手順で阻止されている。したがって、II) の収束があるとすれば、その集積点は、正則領域と特異領域の境界、すなわち限界状態に限られる。

一方、2. で既述のように、限界状態での接線剛性の特異方向 $\{x_j\}^*$ は、一般にその境界面の接面方向となる。したがって、境界面近くで不釣り合い力 $\Delta\{F_j\}_{[i]}$ に少しでも $\{x_j\}^*$ 方向の成分が含まれていれば (i. e. $\{x_j\}^{*T} \Delta\{F_j\}_{[i]} \neq 0$)、式(7)による修正ベクトル $\Delta\{x_j\}_{[i]} = -\theta_{[i]} [K_j]_{[i]}^{-1} \Delta\{F_j\}_{[i]}$ は、十分大きくない、かつ おおむね $\pm\{x_j\}^*$ 方向を向く。つまり、特異領域に入ることとされる傾向にある。II) の収束となるのは、境界近くの正則領域で式(7)の修正をしながら、連続して厳密に $\{x_j\}^{*T} \Delta\{F_j\}_{[i]} = 0$ となる場合に限られ、実際の繰り返し計算の中での可能性は極めて少ないと考えられる。

〈参考文献〉 1) 阿井正博・西岡隆・奥村敏恵：ケーブル構造に関する一理論解析，土木学会論文報告集，No. 260，1977-4. 2) 阿井正博・西野文雄：変位法ケーブル構造系のつり合いと形状決定に関する一理論展開，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第12巻，日本鋼構造協会，1988-7.