I－1　Rayleigh減衰を考慮した幾何的非線形動的応答解析の一定式化

武蔵工業大学　学生員　高橋広幸　　武蔵工業大学　正　員　増田陳紀
武蔵工業大学　正　員　西脇威夫　　武蔵工業大学　正　員　皆川　勝

<u>１．はじめに</u>　構造全体として大きな剛体運動をともないつつ大変形する軽量・薄肉構造物を設計する場合には、幾何的な非線形性を考慮した動的応答解析が必要となる。このような動的応答解析に関する研究は少なく、Simoら[1]，井浦ら[2]による研究が代表的である。しかし、彼らの研究においては、運動方程式の定式化が数学的にかなり複雑であり、必ずしも一般に理解しやすい内容とはなっていない。著者らは以上の点を考慮して、理論から実際の計算までの流れが明確な動的応答解析法を確立することを目的に、そのための第１段階として、静的問題に関して十分有効性が示されている、座標表示に基づく幾何的非線形解析法を非減衰系の動的問題を扱えるように拡張した[3]。さらに、文献［４］において、減衰を考慮したより一般的な定式化を行った。本研究では、文献［４］で示した増分形の運動方程式をもとに、粘性減衰がRayleigh型の減衰に従うと仮定した場合の定式化を示す。なお、ここでの展開では構造減衰を無視する。

<u>２．運動方程式</u>　時刻ｔにおける１つの要素の運動方程式は、全体座標系での質量行列を$\mathbb{M}$，復元力ベクトルを$\mathbb{R}$，外力ベクトルを$\mathbf{f}$，要素の節点変位ベクトルを$\mathbf{u}$とすると次のように書くことができる。なお、上付きの ・ は時間に関する微分を表わす。

$$\frac{d\mathbb{M}\dot{\mathbf{u}}}{dt}+\mathbb{R}=\mathbf{f} \tag{1}$$

式(1)の第１項は時刻ｔにおける要素座標系での質量行列を$\mathbb{M}^*$，全体座標系から要素座標系への座標変換行列を$\mathbb{T}$として次のように書きかえることができる。ただし、要素座標系は常に要素に固定され、要素とともに移動するものとする。

$$\frac{d\mathbb{M}\dot{\mathbf{u}}}{dt}=\mathbb{M}\ddot{\mathbf{u}}+\dot{\mathbb{M}}\dot{\mathbf{u}}=\mathbb{T}^T\mathbb{M}^*\mathbb{T}\ddot{\mathbf{u}}+\dot{\mathbb{T}}^T\mathbb{M}^*\mathbb{T}\dot{\mathbf{u}}+\mathbb{T}^T\dot{\mathbb{M}}^*\mathbb{T}\dot{\mathbf{u}}+\mathbb{T}^T\mathbb{M}^*\dot{\mathbb{T}}\dot{\mathbf{u}} \tag{2}$$

一方、式(1)の左辺第２項は、静的つり合い式における内力項に粘性減衰項を加えて次のように表わされる。ただし、粘性減衰はRayleigh型の減衰と仮定し、粘性減衰行列$\mathbb{C}^*$は$\alpha\mathbb{M}^*+\beta\mathbf{k}^*$（$\alpha$，$\beta$は実験などにより求まる定数）で表わされるものとする。

$$\mathbb{R}=\mathbb{T}^T\mathbf{k}^*\{\mathbb{T}\mathbb{G}(\mathbf{u}+\mathbf{z})-\mathbb{T}_0\mathbb{G}\mathbf{z}_0\}+\mathbb{T}^T\mathbb{C}^*\mathbb{T}\dot{\mathbf{u}} \tag{3}$$

ここに、$\mathbf{u}^T=\{\mathbf{d}^T,\theta^T\}$，$\mathbf{z}=\mathbf{a}-\mathbf{u}$である。$\mathbf{d}$，$\theta$，$\mathbf{a}^T=\{\mathbf{x}^T,\theta^T-\mathbf{r}^T\}$，$\mathbf{x}$，および$\mathbf{r}$はそれぞれ要素の節点並進変位成分ベクトル，要素の節点回転変位成分ベクトル，要素の節点における一般化座標ベクトル，節点座標ベクトル，および要素の剛体回転ベクトルである。また、$\mathbf{k}^*$は要素座標系での剛性行列であり、ここでは通常の線形剛性行列を用いる。$\mathbb{G}$は要素座標系の原点をその要素内の第１節点に設定するためのシフト定数行列である。上付きの添え字 T は転置行列を表わし、下付きの添え字 0 は変形前の初期状態に関する量を表わす。また、上付きの添え字 * は要素と共に移動する要素座標系に関する量を表わす。座標変換行列は増分表示を用いた場合にも定数ではなく、その時点の一般化座標の関数となる。

<u>３．増分形の運動方程式</u>　式(1)～(3)で表わされる運動方程式を直接解くことは困難である。そこで本研究では、増分形の解法を適用することを考え、時刻ｔ＋Δｔおよび時刻ｔにおける運動方程式を差し引き、次のような増分形の運動方程式を用いる。ただし、Δは増分量であることを表わし、また、要素座標系に関しては微小変形を前提としているため、要素座標系での要素質量行列と要素剛性行列は時間に依存しないと

仮定し、$\Delta\mathbb{M}^*$, $\dot{\mathbb{M}}^*$, $\Delta\dot{\mathbb{M}}^*$, $\Delta\mathbb{k}^*$をそれぞれゼロ行列としている。

以下の式において、下付きの添え字（t+Δt）は時刻t+Δtにおける諸量を表わし、時刻tの諸量に関しては添え字を省略している。

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}{}^{T}\mathbb{M}^*\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}\Delta\ddot{\mathbb{u}}+\{\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^*\Delta\mathbb{T}+\Delta\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^*\mathbb{T}+\Delta\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^*\Delta\mathbb{T}\}\ddot{\mathbb{u}}\\
&+\{\dot{\mathbb{T}}_{(t+\Delta t)}{}^{T}\mathbb{M}^*\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}+\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}{}^{T}\mathbb{M}^*\dot{\mathbb{T}}_{(t+\Delta t)}\}\Delta\dot{\mathbb{u}}\\
&+\{\dot{\mathbb{T}}_{(t+\Delta t)}{}^{T}\mathbb{M}^*\Delta\mathbb{T}+\Delta\dot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^*\mathbb{T}+\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}{}^{T}\mathbb{M}^*\Delta\dot{\mathbb{T}}+\Delta\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^*\Delta\dot{\mathbb{T}}\}\dot{\mathbb{u}}\\
&+\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}{}^{T}\mathbb{k}^*\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}\Delta\mathbb{u}+\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}{}^{T}\mathbb{k}^*\{\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}\Delta\mathbb{z}+\Delta\mathbb{T}\mathbb{G}(\mathbb{u}+\mathbb{z})\}+\Delta\mathbb{T}\mathbb{f}^*\\
&+\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}{}^{T}\mathbb{C}^*\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}\Delta\dot{\mathbb{u}}\\
&+\{\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}{}^{T}\mathbb{C}^*\Delta\mathbb{T}+\Delta\mathbb{T}^{T}\mathbb{C}^*\mathbb{T}_{(t+\Delta t)}\}\dot{\mathbb{u}}\\
&=\Delta\mathbb{f}
\end{aligned}
$$

実際の計算において、例えば、$\dot{\mathbb{T}}_{(t+\Delta t)}$, $\Delta\dot{\mathbb{T}}$は次のように評価される。

$$
\dot{\mathbb{T}}_{(t+\Delta t)}=\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial\mathbb{u}^{T}}\Big|_{(t+\Delta t)}\cdot\dot{\mathbb{u}}_{(t+\Delta t)}=\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial\mathbb{u}^{T}}\Big|_{(t+\Delta t)}\cdot\{\dot{\mathbb{u}}+\Delta\dot{\mathbb{u}}\}
$$

$$
\Delta\dot{\mathbb{T}}=\{\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial\mathbb{u}^{T}}\Big|_{(t+\Delta t)}-\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial\mathbb{u}^{T}}\Big|_{(t)}\}\dot{\mathbb{u}}+\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial\mathbb{u}^{T}}\Big|_{(t+\Delta t)}\cdot\Delta\dot{\mathbb{u}}
$$

文献［4］では一般的な定式化を行ったが、実際の計算では簡略化を行い、座標変換行列の時間微分項を具体的に評価することは行わなかった。ここでは、より支配方程式に忠実な計算を行うことを目的として、$\dot{\mathbb{T}}$の具体的な評価方法も示した。

<u>4．おわりに</u>　本研究では、著者らが提案した座標表示に基づく静的な非線形解析法を基礎とした幾何的非線形動的応答解析について、粘性減衰としてRayleigh型の減衰を考慮した場合の支配方程式を示した。また、ここでは、座標変換行列の時間微分項の具体的な評価法をも示した。なお、紙面の関係上、数値計算例に関しては当日示す予定である。最後に、本研究を行うにあたり、御協力いただいた丸山大三君に厚くお礼申し上げます。

◆ 参考文献 ◆

1） J.C.Simo and L.vu Quoc : A Novel Approach to the Dynamic of Flexble Beams Under Large Overall Motions - The Plane Case, Electoronics Research Laboratory, Memorandum No.UCB/ERL M85/63 31, 1985.

2） 井浦雅司, S.N. Atluri：有限回転を伴う空間曲線充実棒部材の動的解析，構造工学論文集，Vol.35A, pp.165-174, 1989年3月．

3） Masuda,N., Nishiwaki,T. and Minagawa,M. : Nonlinear Dynamic Analysis of Frame Structures , Computers & Structures, Vol.27, No.1, pp.103-110, 1987.

4） 増田陳紀・西脇威夫・皆川　勝・高橋広幸：幾何的非線形動的応答解析の一手法と平面骨組解析への応用，構造工学論文集，Vol.35A, pp.185-194, 1989年3月．