PSⅠ-2　ブロック対角化による軸対称構造系の高速解析

長岡技術科学大学　○正員　池田　清宏
東京大学　　　　　　　　　室田　一雄
長岡技術科学大学　　正員　鳥居　邦夫

1。はじめに

膨大な行列演算を伴う実構造物の解析に際し、幾何学的対称条件により計算量を減らす事が行なわれている。特に、軸対称性を持つ円筒シェルや球殻ドームに軸対称荷重が載荷する場合には、変形の軸対称性を仮定する事により、解析の労力を劇的に減らす事ができる。しかし、分岐解析に際して解の対称条件を課す事は、その条件を満足しない分岐モードを誤って排除してしまう事が問題になる。そこで、分岐座屈の存在を見逃すことなく、軸対称構造物の分岐解析を効率よく行なう手法として著者らは文献１で「局所座標変換」による接線剛性行列のブロック対角化を提案した。この手法を用いると、接線剛性行列の掃き出し等の行列演算が、個々のブロック行列の行列演算により置き換えられるので、演算量は激減する。群の表現論を必要とする数学的な議論は文献１に譲る事とし、ここでは、図１に示す簡単な正３角形トラスドーム構造例のブロック対角化についてまとめることとする。

2。正３角形トラスドームの解析結果

正３角形トラスドームの変形モードは二面体群D_3の部分群により下記の４種類に分類できる、

D_3 :　正３角形モード
C_3 :　正３角形が周方向に回転したモード
D_1 :　２等辺三角形モード
C_1 :　非対称モード

図２にこれらのモードを示す。

このドームは４つの自由節点を持つので、このドームの変形挙動は４×３＝１２次元の実数空間R_{12}により表わされる。この空間は以下の４個の部分空間に分解される、

$$X = X(D_3) \oplus X(C_3) \oplus X(D_1) \oplus X(C_1)$$

ここで、空間X(　)は括弧内の群により表される対称性を持つ。このドームの「局所」座標変換行列は空間$X(D_3)$、$X(C_3)$、$X(D_1)$、$X(C_1)$を張る基底列ベクトルにより構成され、

$$H = (H(D_3),\ H(C_3),\ H(D_1),\ H(C_1))$$

と表される。参考文献１の公式により求めた、この行列の具体的な値を表１に示す。

このドームの非線形釣合方程式を、

$$df \cdot f_0 = J \cdot du$$

と表す。ここで、dfは荷重増分ベクトルを、f_0は軸対称荷重パターンベクトルを、Jは接線剛性行列を、duは節点変位増分ベクトルをそれぞれ表す。行列Hにより、

$$u = Hw \quad , \quad w = (w(D_3)^T,\ w(C_3)^T,\ w(D_1)^T,\ w(C_1)^T)^T \qquad (1)$$

と座標変換すると、接線剛性行列Jは

$$J^* = H^T J H = \mathrm{diag}\,(J(D_3),\ J(C_3),\ J(D_1),\ J(C_1)), \qquad J(D_1) = J(C_1)$$

とブロック対角化され、同様に、非線形有限変位釣合式も、

$$df \begin{vmatrix} f(D_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J(D_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J(C_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J(D_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J(C_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dw(D_3) \\ dw(C_3) \\ dw(D_1) \\ dw(C_1) \end{vmatrix}$$

とブロック対角化される。全てのブロック行列が特異でない点、すなわち通常点では、この方程式の解は

$$dw(D_3) = J(D_3)^{-1} \cdot f(D_3) \cdot df$$

$$dw(G) = 0, \qquad G = C_3, D_1, C_1$$

と表される。この解を式（１）に代入すると

$$du = H(D_3)\,J(D_3)\,f(D_3)\,df$$

というD_3の対称性（正３角形モード）を持つ主径路上の解の増分ベクトルが求まる。

主径路上の分岐点では、あるブロック行列が特異となり、

$$J(G)\,dw(G) = 0, \quad \det|J(G)| = 0, \qquad G = C_3, D_1, C_1$$

を満たす自明でない$dw(G)$が存在する。この時、その他の増分成分は零になるので、分岐パターンを示す固有ベクトルduは次式により与えられる、

$$du = H(G)\,dw(G), \qquad G = C_3, D_1, C_1$$

このトラスドームでは、１２次元の行列演算が、それぞれ、３、１、４、４の次元を持つ４個のブロック行列の行列演算で置き換えられ、演算量を減らすことができた。しかも、$J(D_1)$と$J(C_1)$は同一の行列であるので、その内一方だけの解析を行なえば良い事は数値解析上有利であった。

球殻シェル等の軸対称構造物の接線剛性行列はその対称性に起因する群論的２重根の分岐点を持つ。ところが、本解析法では、２重根の零固有値が別々のブロック行列に含まれ、各ブロック行列の固有値は全て単根になるので、２重分岐点の問題も自動的に解決されることになる。

参考文献　K.Murota and K.Ikeda, Computational Use of Group Theory in Bifurcation Analysis of Symmetric Strutures, Submitted to SIAM.

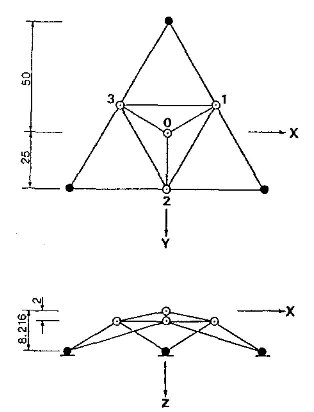

Fig. 1 A regular triangular truss dome.

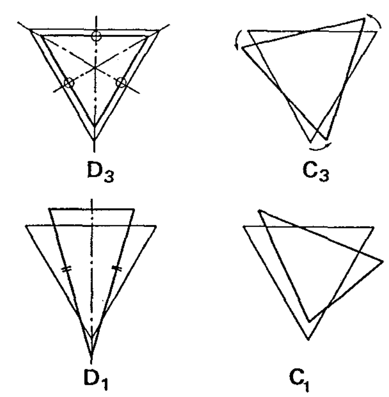

Fig. 2 Deformation modes of the dome.

Table 1　H matrix for the D_3-covariant truss dome.

	Symmetry Groups											
	D_3			C_3	D_1^1				C_1			
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}	h_{12}
x_0									1			
x_1				$\sqrt{3}/3$							$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$
x_2			1/2	$-\sqrt{3}/6$				1/2			$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$
x_3			-1/2	$-\sqrt{3}/6$				-1/2			$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$
y_0					1							
y_1			$\sqrt{3}/3$				$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$				
y_2			$-\sqrt{3}/6$	-1/2			$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$				1/2
y_3			$-\sqrt{3}/6$	1/2			$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$				-1/2
z_0	1											
z_1		$\sqrt{3}/3$				$\sqrt{6}/3$						
z_2		$\sqrt{3}/3$				$-\sqrt{6}/6$				$\sqrt{2}/2$		
z_3		$\sqrt{3}/3$				$-\sqrt{6}/6$				$-\sqrt{2}/2$		