土木学会第43回年次学術講演会（昭和63年10月）

Ⅳ-224　もう一つのＲＭＡについて

八戸工業大学　正会員　岩淵清行

１．まえがき

ＲＭＡは[1]、ＹのＸへの回帰直線とＸのＹへの回帰直線とのほぼ二等分線となっているところの「あてはめ直線」の一種である。いま両回帰直線をそれぞれＹ＝Ａ１・Ｘ＋Ｂ１，Ｙ＝Ａ２・Ｘ＋Ｂ２，そしてＲＭＡを　Ｙ＝Ａ４・Ｘ＋Ｂ４とするときＡ４≡ＳＧＮ（Ａ１）・√（Ａ１・Ａ２），Ｂ４≡Ｙｇ－Ｘｇ・Ａ４となる。ここにＸｇ，Ｙｇは与えられたｎ個の測点Ｐｉ（Ｘｉ，Ｙｉ）の重心のそれぞれＸ，Ｙ座標値である。このＲＭＡは両軸に同じ程度の観測誤差を見込むときのあてはめ直線として使われることがある。さて、回帰直線と名のつくものにもう一つ直交回帰直線（略称ＭＡ）と呼ばれるものがある。これは　Ｘｉの観測の重さをｐｘｉ，Ｙｉのそれをｐｙｉとするときｐｘｉ＝１，ｐｙｉ＝１（ｉ＝１，２，．．．，ｎ；ｎ＞＝３）とするものである。ＭＡ（直交回帰直線）の式はＹ＝Ａ３・Ｘ＋Ｂ３と書く。以上４本の直線はどれも重心を通る。ＭＡはよく知られるように両回帰直線のあいだにはいってくるが、勾配がそれ自身±１より急なときは、ＸのＹへの回帰直線のすぐそばに、また勾配がそれ自身±１より緩いときはＹのＸへの回帰直線のそばにくる。ＭＡのこの図形的性質は「軸単位を変えると予測値が変わる」のと同値である。

ところで、　あてはめ直線の勾配やＹ切片を求めるには最小二乗法によるよらないにかかわらず目的関数ｆなるものを想定して　ｆ最小となるように求めるのが普通である。ｆの関数形は最小二乗法のときは重さつきの残差二乗和である。ＲＭＡのときのｆはｕｉ・ｖｉの和である。ここにｕｉは各測点ＰｉからＸ軸に平行に引いた直線が解直線と交わる点をＵｉとして線分<u>ＰｉＵｉ</u>の長さ、ｖｉは各測点ＰｉからＹ軸に平行に引いた直線が解直線と交わる点をＶｉとして線分<u>ＰｉＶｉ</u>の長さである。春日屋博士[2]にならってｕｉをＸｉの偏差，ｖｉをＹｉの偏差と呼ぶことにすると，ＲＭＡは偏差積和最小直線である。簡便のためＹ＝ＡＪ・Ｘ＋ＢＪで示した直線を第Ｊ直線（Ｊ＝１，２，３，４）と呼ぶことにしよう。第１直線と第２直線の偏差積和は厳密に等しい。いま三点Ｐｉ，Ｕｉ，Ｖｉから成る三角形を示誤三角形と呼ぶことにするとＲＭＡは示誤三角形の面積和最小直線である。　さてｆの形としては、

$$f \equiv \Sigma\,(px_i \cdot u_i^2 + py_i \cdot v_i^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

とする人もいる。ここにΣはｉに関し１からｎまでの総和（以下同様）。このｆは重さつきの偏差二乗和の形である。この場合ｐｘｉ＝１，ｐｙｉ＝１とおくと、結果の解直線はいつもＲＭＡのそばに位置している。表題で「もう一つのＲＭＡ」と言ったのはこの直線のことである。小論はこれに関連したことについて述べるものである。

２．「もう一つのＲＭＡ」を求めるための方程式

解直線をｙ＝ａ・ｘ＋ｂとする。$u_i^2 = (a \cdot x_i + b - y_i)^2 / a^2$，$v_i^2 = (a \cdot x_i + b - y_i)^2$
そして　ｐｘｉ＝１，ｐｙｉ＝１。これらを（１）に代入すると

$$f \equiv \Sigma\,(a \cdot x_i + b - y_i)^2 (1/a^2 + 1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

したがって　$\partial f / \partial a = 0$，$\partial f / \partial b = 0$よりつぎの二つの方程式が得られる。

$$\Sigma\,(a \cdot x_i + b - y_i)(a^3 \cdot x_i - b + y_i) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$b = Yg - Xg \cdot a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

（４）式を（３）式に代入するとａのみの４次方程式がでてくる。すなわち

$$Sx^2 \cdot a^4 - Sxy \cdot a^3 + Sxy \cdot a - Sy^2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ここに$Sx^2 \equiv [xx] - [x]^2/n$，$Sy^2 \equiv [yy] - [y]^2/n$，$Sxy \equiv [xy] - [x][y]/n$である。
更に$A1 \equiv Sxy/Sx^2$，$A2 \equiv Sy^2/Sxy$なることから（５）は次のように奇麗な形に書きなおされる。

$$a^4/A1 - a^3 + a - A2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

この式は最小二乗法によるｐｘｉ＝１，ｐｙｉ＝１の場合すなわち直交回帰直線のときの勾配ａを求める方程式

$$a^2 - (A2 - 1/A1)\,a - 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

に対応する。（７）の根に不適なものがあったように（６）の根にも不適なものがある。解直線のうち（２）のｆ値が

最小となるものをもって適根とする。そして（６）式の左辺をＦ（ａ）とおくに、ＳＧＮ（Ｆ（０））＝（－）ＳＧＮ（Ｆ（±∞））であるから（６）の方程式は常に少なくとも二つの実根をもつ。かくして我々は解直線の存在することがわかった。この直線をＹ＝Ａ５・Ｘ＋Ｂ５とかき第５直線と呼ぶことにしよう。

３．「もう一つのＲＭＡ」は「中点線」の二乗和最小直線である。

我々はここで前述の示誤三角形に注目しよう。その斜辺ＵｉＶｉは解直線そのものの上に乗っている。さて、この斜辺ＵｉＶｉの中点をＱｉとし、測点ＰｉとＱｉを結ぶ線分を「中点線」と呼ぶことにする。この「中点線」を、ベクトル的に考えその長さをｓｉそのX成分をΔｘｉ，Y成分をΔｙｉとする。

突然ではあるが我々はここで $f \equiv \Sigma s_i^2$ 最小となるように解直線ｙ＝ａ・ｘ＋ｂを求めることを考えてみよう。

$$\Delta y_i^2 = ((a \cdot x_i + b - y_i)/2)^2,\ \Delta x_i^2 = ((a \cdot x_i + b - y_i)/2/a)^2$$

$$\therefore f = (1/4) \cdot \Sigma (a \cdot x_i + b - y_i)^2 (1 + 1/a^2) \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

この（８）式と（２）式をくらべてみると我々の第５直線は丁度「中点線」二乗和最小直線になっていることがわかる。但しｆ値を計算するときには（８）式には（１／４）がついていることに注意せよ。この「中点線二乗和最小直線」は、「いわゆる斜め線二乗和最小直線」の一種である。この場合の斜め線は全部平行になっている。

４．「中点線」二乗和最小直線の考え方の拡張

いま非負の実数ｐ，ｑを与えておき、示誤三角形のＱｉ点をきめるときに、ＵｉＱｉ：ＱｉＶｉの比をｐ：ｑとする。そしてＰｉＱｉをあらためて「斜め線」と呼ぶことにし、「斜め線二乗和最小直線」を求めることを考える。

この場合解直線は重心を通り勾配ａはつぎの（９）式から求められる。

$$p^2 \cdot a^4/A1 - p^2 \cdot a^3 + q^2 \cdot a - q^2 \cdot A2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

この式でｐ＝０の時　ａ＝Ａ２　すなわち　XのYへの回帰直線、ｑ＝０の時　ａ＝Ａ１　すなわち　YのXへの回帰直線、　$p:q = 1:a^2$　の時　直交回帰直線　がえられる。また測点が与えられるとＡ１，Ａ２は既知数のようにきまってしまうが、たまたま　$1/(p/q)^2 = A1 \cdot A2$ の如くになった場合を考えてみると、（９）は

$$a^4/A1 - a^3 + A1 \cdot A2 \cdot a - A1 \cdot A2 \cdot A2 = 0$$

となる。この方程式は、　$a = SGN(A1) \cdot \sqrt{(A1 \cdot A2)}$ を根とする。だからRMAがえられた。

つぎに「重さつきの偏差二乗和最小二直線」の場合ｐｘｉ，ｐｙｉが　ｉのいかんにかかわらづそれぞれ定数　ｐｘ，ｐｙだと仮定すると（ここにｐｘ，ｐｙは非負）、ｂ＝Ｙｇ－Ｘｇ・ａ　そしてａをもとめる方程式は

$$px \cdot a^4/A1 - px \cdot a^3 + py \cdot a - py \cdot A2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

ゆえに「重さつきの偏差二乗和最小二直線」の時の重さの幾何学的意味が（９）との対比からわかる。と言うのはたとえばｐｘ＝０とすると　ａ＝Ａ２が　でてくる。伝統によってもａ＝Ａ２である。

５．むすび

「重さつきの偏差二乗和最小二直線」と「斜め線二乗和最小直線」との間にどんな関係があるのかしらべているうちに、矛盾がないことがわかった。どちらか一方　あるいは　両方に考え方のあやまりがあるのであればこうはならいだろう。

注目すべき事は「重さつきの偏差二乗和最小二直線」や「斜め線二乗和最小直線」のときｐｘｉ＝１，ｐｙ１＝１なら直行回帰直線はでてこない。

６．参考文献

1)Curran, P. J., and M. H. Alan, 1986. The Importance Of Measurement Error for Certain Procedeures in Remote Sensing at Optical Wavelengths, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 52:229-241

2)春日屋 ，1985. 対数正規分布に従う水文量の統計的予測　中央大学１００周年記念論文集　理工学部 pp. 289-310