

IV-223 等高線と最急勾配線作画に対する一方法

法政大学計算センター 正会員 武田 洋

法政大学工学部土木工学科 正会員 宮下 清 栄

1. はじめに 地域計画などに数値地形情報を用いて最適開発地を選定する手法が用いられるようになってきた。また、有限要素メッシュによる等高線作画システムは種々開発されている。そこで、本研究は等高線と最急勾配線作画のために、有限要素法による応用力学問題の解析変数に対する手法を応用したアルゴリズムについて論じ、さらに、迅速かつ的確に評価するために、コンピュータグラフィクスを応用した可視化について考察するものである。

2. ベクトル場とベクトル線 ここでは、与えられたベクトル場と与えられたベクトル場の曲線に対する等高線作画の基礎になるポテンシャル関数について論じる。

2.1 三次元領域 与えられたベクトル場に対して、到る所である曲線の接線がそのベクトル場の方向と一致するとき、ベクトル場 V 、ベクトル線 $X(\ell)$ は

$$V = C dX \quad \text{or} \quad V \times dX = 0 \quad (1)$$

ここで、 C は一定であり、 0 は 0 ベクトルである。(図-1 参照)

次に、ベクトル線の説明パラメータとして、総和規約に則る別の方式の解式 X_k を利用すると、

$$\epsilon_{ijk} V_j \frac{\partial X_k}{\partial \ell} d\ell = 0, \quad (2)$$

ここで、 ℓ はベクトル線のパラメータ、 ϵ_{ijk} は交代記号である。

ベクトル線を表現するために等高線作画のアルゴリズムを応用するならば、ベクトル線に沿ってベクトルは一定であるベクトルポテンシャル ψ_i を導くことができる。

$$d\psi_i = \epsilon_{ijk} V_j \frac{\partial X_k}{\partial \ell} d\ell = 0 \quad (3)$$

従って、ベクトル線にそって ψ_i が一定である必要がある。

$$\epsilon_{ijk} V_j \frac{\partial X_k}{\partial \ell} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \ell} \quad (4)$$

よって、式(4)から式(3)を満足させるためには、ベクトル場 V_i は次のように表せる。

$$V_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial X_j}, \quad (5)$$

ここで、 ψ_k はベクトルのポテンシャル関数に相当する。

これは、与えられたベクトル場に対して非圧縮性条件を課することになる。

$$\frac{\partial V_i}{\partial X_i} = 0, \quad (6)$$

2.2 二次元領域 二次元領域(例えば、三次元物体の表面に対する表示に用いるような場合)に対しては、スカラー関数 ψ を導入して、式(3)を変形すると

$$d\psi = \epsilon_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{\partial X_\beta}{\partial \ell} d\ell = 0 \quad (7)$$

ここで、下付きのギリシャ文字の範囲は2であり、

$\epsilon_{\alpha\beta}$ は二次元の交代記号である。

$$V_X = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad \text{and} \quad V_Y = -\frac{\partial \psi}{\partial X}. \quad (8)$$

3. 有限要素法によるポテンシャル関数の計算

ベクトルポテンシャル関数 ψ_i または ψ を求めるための計算方法について論じる。初めに、二次元及び三次元の場合の直接法について述べ、次に、二次元領域に対する反復法について考察する。

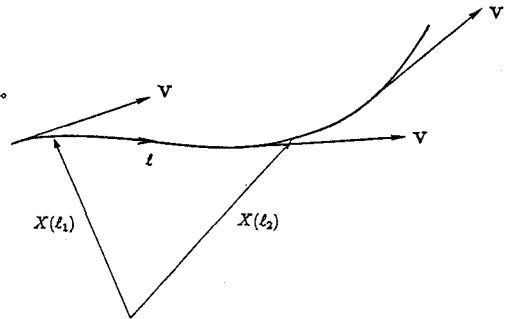


Figure 1: Vector field and vector line

3.1 直接法 式(5)を変形すると次式が得られる、

$$\int_{\Omega} \omega_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial X_j} d\Omega = \int_{\Omega} \omega_i V_i d\Omega \quad (9)$$

ここで、 ω_i は重み関数であり Ω は与えられた領域である。次に、有限要素補間を導入すると、

$$\omega_i = \hat{N}_I \omega_{Ii}^e \quad (10) \quad \psi_k = \hat{N}_J \psi_{Jk}^e \quad (11)$$

ここで、大文字の下付きラテン文字は節点を表し、上付きのeは、要素を表す。

$$\text{式(11)より空間導関数 } \psi_k \text{ は、} \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial X_j} = \frac{\partial \hat{N}_J}{\partial X_j} \psi_{Jk}^e = \hat{B}_{Jj} \psi_{Jk}^e \quad (12)$$

式(10)から(12)を式(9)に代入することにより次式が得られる。

$$A_{IiJj} \psi_{Jj} = F_{Ii} \quad (13)$$

ここで、 ψ_{Jj} は節点におけるポテンシャル関数の値（未知）であり、 A_{IiJj} は係数行列、 F_{Ii} は重みベクトルで次のように表される、

$$A_{IiJj} = - \int_{\Omega} \epsilon_{ijk} \hat{N}_I \hat{B}_{Jk} d\Omega \quad (14) \quad F_{Ii} = \int_{\Omega} \hat{N}_I V_i d\Omega. \quad (15)$$

次に、二次元の場合においては、次式によって表される。

$$A_{I\alpha J} \psi_J = F_{I\alpha}, \quad (16)$$

ここに、

$$A_{I\alpha J} = \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \hat{N}_I \hat{B}_{J\beta} d\Omega \quad (17) \quad F_{I\alpha} = \int_{\Omega} \hat{N}_I V_{\alpha} d\Omega. \quad (18)$$

3.2 反復法 ここでは、二次元の場合の簡単な反復法について論じる。有限要素法による解析変数はガウスの積分点のように、節点あるいは各要素内部の点において評価される。ここでは、ポテンシャル関数 ψ を変換した解析変数は節点の平均応力を求めることにする。

任意の節点Iから要素境界に沿った節点Jまでのポテンシャル関数の変化 $\Delta\psi$ は次式より求められる。

$$\Delta\psi = \int_{\ell_I}^{\ell_J} d\psi. \quad (19)$$

式(7)を式(19)に代入することにより

$$\Delta\psi = \int_{\ell_I}^{\ell_J} \frac{\partial \psi}{\partial X_{\alpha}} \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial \ell} d\ell = \int_{\ell_I}^{\ell_J} V_{\alpha} n_{\alpha} d\ell, \quad (20)$$

次式が得られる。ここで、 n_{α} は要素境界の外向き単位法線ベクトルである。（図-2参照）

次に、与えられたベクトル場 V_{α} と位置ベクトル X_{α} に

対して有限要素補間を導入する、

$$V_{\alpha} = N_I V_{I\alpha}^e \quad (21) \quad X_{\alpha} = N_J X_{J\alpha}^e. \quad (22)$$

式(22)より、

$$N_{\alpha} = -\epsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial X_{\beta}}{\partial \ell}. \quad (23)$$

外向き法線方向 N_{α} は

それ故、外向き法線ベクトル n_{α} は次式によって表される

$$n_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{\|N_{\alpha}\|} = -\frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{\|N_{\alpha}\|} \frac{\partial N_J}{\partial \ell} X_{J\beta}^e = B_{J\alpha\beta}^n X_{J\beta}^e. \quad (24)$$

式(21)と(24)を式(20)に代入することによって、次式が得られる

$$\Delta\psi = \int_{\ell_I}^{\ell_J} V_{\alpha} n_{\alpha} d\ell = V_{I\alpha}^e \int_{\ell_I}^{\ell_J} N_I B_{J\alpha\beta}^n d\ell X_{J\beta}^e. \quad (25)$$

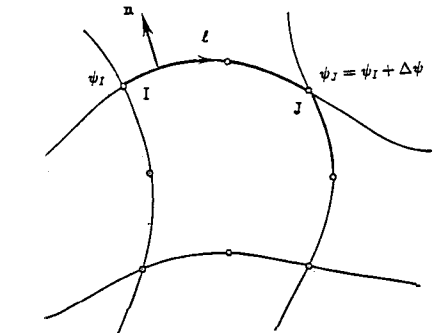


Figure 2: Interelement boundary curve and incremental potential function

上式をすべての有限要素メッシュについて評価することにより、有限要素モデルのすべての節点におけるベクトルポテンシャル関数の変化を定めることが出来る。

4. あとがき

解析例として、今後開発が望まれる埼玉県山間地域（23市町村）を用いた。出力例については講演時に説明する。本研究では等高線や最急勾配線を可視化するための新しいアルゴリズムを提案した。今後の課題としては、他の地形情報などとの利用形態を開発することである。