Ⅳ-100　確率的ネットワーク配分において経路を列挙せずに利用者余剰を求める方法

東京大学　学生会員　赤松　隆

1．はじめに

ランダム効用理論において，重要な役割を果たす関数として，「期待最大効用関数（満足度関数）」がある．これは，ネステッドロジットモデルにおいては，下位レベルの選択肢の代表変数となり[1]，また，利用者の余剰を表わす指標と解釈できる[2]，一種の「効用ポテンシャル関数」である．

ランダム効用理論に基づく確率的ネットワーク配分においては，経路を選択肢とみなすが，一般的な大規模ネットワークにおいて全ての経路を列挙することは事実上，不可能であるため，この関数の値を計算することは困難であると言われてきた[3]．しかし，ロジットモデル系の確率配分モデルに限れば，エントロピーの加法性を用いることにより，経路を列挙することなく，この値を求めることができる．以下では，その手順と簡単な例を示す．ただし，記号の煩雑さを避けるために，ある１つのＯＤペアが与えられた場合の例で説明する（多ＯＤペアの場合は，各ＯＤペアを重ね合わせて考えればよいから一般性は失われない）．

2．期待最大効用関数

効用Ｕを次式で定義するとき，

$$U_k = -\theta C_k + \xi_k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ここで，C_k：第ｋ番目の経路の所要費用，θ：効用の誤差項ξのバラつきを示すパラメータ，ロジットモデルに基づいた経路選択モデルの期待最大効用関数Ｓ’は，次の式で表わされる期待最小費用関数Ｓの符号を変え，θ倍したものである．

$$S[\mathbb{C}] = -(1/\theta)\ln\{\Sigma_k \exp(-\theta C_k)\}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

従来の研究[4,5] によれば，この関数は，経路エントロピー関数Ｈと共役な関数である．すなわち，

$$S[\mathbb{C}] + H[\mathbb{P}] = \langle \mathbb{P}, \mathbb{C} \rangle \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ここで，$H[\mathbb{P}] = -(1/\theta)\,\Sigma_k P_k \ln P_k$，$\mathbb{P}$：経路選択率ベクトル．

この式の右辺は，リンクフローをもとに計算することができる．すなわち，

$$\langle \mathbb{P}, \mathbb{C} \rangle = \Sigma_k P_k C_k = \Sigma_a x_a c_a / q \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ここで，x_a，c_a：リンクａの交通量，所要費用，　ｑ：ＯＤ交通量．

従って，経路エントロピーＨの値が計算できれば，期待最小費用の値も容易に計算できることがわかる．以下では経路を列挙せずに，経路エントロピーを計算するアルゴリズムを示す．

3．アルゴリズム

Ｓｔｅｐ．０：Ｄｉａｌ法によりリンクフローx_aを求める．

Ｓｔｅｐ．１：ノード分岐確率p_{ia}，ノードウェイトw_i を次式により求める．

$$p_{ia} = x_a \Big/ \sum_{a\in F_i} x_a, \qquad w_i = \sum_{a\in F_i} x_a / q$$

Ｆｉ：ノードｉから出るリンクの集合

Ｓｔｅｐ．２：ノードエントロピーH_iを次式により求める．

$$H_i = -(1/\theta)\, w_i \sum_{a\in F_i} p_{ia} \ln p_{ia}$$

Ｓｔｅｐ．３：ノードエントロピーを全てのノードについて足し合わせる．

$$H = \Sigma_i H_i$$

4．数値計算例

上記アルゴリズムにより，経路エントロピーが求められることは，ＤＩＡＬ配分法のマルコフ連鎖的性質（経路選択率がリンク尤度の積に比例すること）と独立事象に対するエントロピーの加法性から証明することができる[6]． 以下に，直感的に理解しやすい簡単なネットワークでの数値計算例を示す．

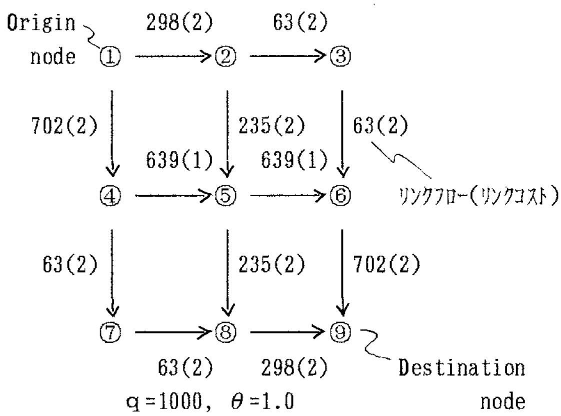

図1．ＤＩＡＬ配分フロー

表１．ノードエントロピー

ノード	w_i	p_{ia}		H_i
①	1.0	.298	.702	0.609
②	.298	.211	.789	0.153
③	.063	1.0	----	0.0
④	.702	.910	.090	0.213
⑤	.874	.731	.269	0.509
⑥	.702	1.0	----	0.0
⑦	.063	1.0	----	0.0
⑧	.298	1.0	----	0.0
⑨	1.0	1.0	----	0.0

▽全ノードエントロピー：Σ_i Hi= 1.48

平均費用：$\Sigma_a\ x_a c_a/q$ = 6.72

表２．ロジット配分による経路エントロピーの計算

経路	C_k	$\exp(-C_k)$	P_k	$-P_k\ln P_k$	P_kC_k
①②③⑥⑨	8	3.355^{-4}	.063	0.174	0.504
①②⑤⑥⑨	7	9.119^{-4}	.172	0.303	1.204
①②⑤⑧⑨	8	3.355^{-4}	.063	0.174	0.504
①④⑦⑧⑨	8	3.355^{-4}	.063	0.174	0.504
①④⑤⑧⑨	7	9.119^{-4}	.172	0.303	1.204
①④⑤⑥⑨	6	2.479^{-3}	.467	0.356	2.802
Σ_k	44	5.309^{-3}	1.00	1.484	6.722

▼経路を列挙せずに計算した期待最小費用

$\Sigma_k P_kC_k+\Sigma_k P_k\ln P_k=\Sigma_a x_a c_a/q-\Sigma_i H_i$

= 6.72-1.48= 5.24

▼経路を列挙して直接計算した期待最小費用

$-(1/\theta)\ln\Sigma_k \exp(-\theta C_k)$= 5.24

参考文献 [1] W.L.H.C.Williams, On the formation of travel demand models and economic evaluation measure of user benefit,Environment and Planning 9A,pp.285-344,1979.

[2] K.Sasaki, Travel demand and the evaluation of transportation system change,Environment and Planning 14A,pp.169-182,1982.

[3] Y.Sheffi, Urban transportation networks, Prentice Hall,INC.,1985

[4] 宮城俊彦・小川俊彦，共役性理論を基礎とした交通配分モデルについて,土木計画学研究講演集, No.7, pp.301-308,1985.

[5] T.Miyagi,On the stochastic user equilibrium model consistent with the random utility theory, Proc. of the WCTR,pp.1619-1635,1985

[6] 赤松 隆，需要変動型確率的利用者均衡配分に関する研究，部内資料 Nov.,1987