

III-427

土の粒状体構造表現の試み

岐阜大学工学部 正会員 宇野尚雄
 岐阜大学工学部 正会員 ○ 杉井俊夫
 (株)小 山 佐橋祐輔

1. 均等径の2次元粒状体モデル

均等な砂の構造を表現するモデルとして提案された2次元モデルには2点誤りが判明したので正しいモデル記述を要約すると次のようである。①2次元的に積層された均等径の粒子の中心を直線で結ぶと図-1に示すトラス構造ができる。②それは等しい辺長をもつ、 i 角形($i=3, 4, \dots$)の組み合わせとみることができる。③ i 角形要素が現れる確率を P_i とすると、 $P_i \sim i$ の関係は間隙比 e をパラメータとして表現される。後述の図-4、式(7)参照。 P_i の分布は砂の構造を表現する一指標とみなせる。④ i 角形要素の面積は正 i 角形のとき最大となり、このときの間隙比を $e_{i,max}$ と表す。同様にその最小面積は3角要素のときと等しく、 $e_{i,min}$ と表すと、次式で与えられる。

$$e_{i,max} = \frac{A_{i,max}}{A_{si}} - 1 \quad (1), \quad e_{i,min} = e_3 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} - 1 \quad (2)$$

$$A_{i,max} = \frac{iD^2}{4} \tan\left[\frac{i-2}{2i}\pi\right] \quad (i \geq 4) \quad (3), \quad A_{si} = \frac{\pi D^2(i-2)}{8} \quad (4)$$

ここに D は均等な粒径である。 i 角形要素の間隙比 e_i は式(1)と式(2)の中間に分布し、平均間隙比 $\bar{e}_i$ と全体の間隙比 e とは次の関係である。

$$e = \sum (i-2)P_i \bar{e}_i / \sum (i-2)P_i \quad (5)$$

$$\textcircled{5} \text{均等粒子の集合体について } S = -\sum P_i \ln P_i \quad (6)$$

で定義されるエントロピー S を最大にする条件を求めると

$$P_i = \frac{\exp(\beta E_i)}{\sum \exp(\beta E_i)} \quad (7), \quad E_i = \frac{(i-2)(e - \bar{e}_i)}{1 + e} \quad (8), \quad \sum P_i E_i = 0 \quad (9), \quad \beta = \frac{1}{E_3} \sum P_i \ln(P_3/P_i) \quad (10)$$

ここに β は定数で、式(7)~(9)の誘導時に導入したラグランジェの未定係数である。

2. 考察

以前の誤りは式(2)と式(5)を別の表現にしていたものである。さて、上述の2次元モデルでは、全体の間隙比 e と平均間隙比 $\bar{e}_i$ を与えてやると、式(7)~(10)を満足するように P_i を決定することによりきまる。 P_i の分布が決まると、粒子の平均接点数 n_c 、平均間隙径 D_i^* (i 角形要素)、粒状体の平均間隙径 D^* は、

$$n_c = 2 + 4/(\sum i P_i - 2) \quad (11), \quad D_i^*/D = \sqrt{(i-2)\bar{e}_i/2} \quad (12), \quad D^*/D = \sqrt{\frac{e}{2} \sum (i-2)P_i} \quad (13)$$

でそれぞれ与えられる。さて、 $\bar{e}_i$ がどんな値になるかを調べた実験結果は図-2の4角形要素の鋭角の分布から図-3に示している。4角形要素の鋭角の分布は $\pi/3 \sim \pi/2$ で、その平均は間隙面積を考察するので理論的には $\sin^{-1}(3/\pi) = 72.73^\circ$ であるが、図-3の整理によると実験では 73.3° が観測され、 $\bar{e}_i = (e_{i,max} + e_{i,min})/2$ で与えられることが分かった。これを用いて $i \sim P_i \sim e$ の関係は図-4のように求まり、式(13)で与えられる関係は数値計算の結果、図-5のように $D^*/D = 1.88e + 0.05$ (14) で与えられることが判明した。同様に図-6は接点数 n_c の理論曲線と実験値を、図-7は i 角形要素の出現確率 P_i の分布(図-4)を実験値とそれぞれ対比したもので、いずれも良い一致をみている。

このモデルは(1)均等径 $\rightarrow$ 種々の粒径、(2)2次元 $\rightarrow$ 3次元化、の2点の改善が必要である。

(参考文献) T. Uno and M. Fukuda: A Method to express the structure of uniform sand, Proc. of 7th Asian Regional Conf. on SMFE., Vol.1, pp.371~376, 1983

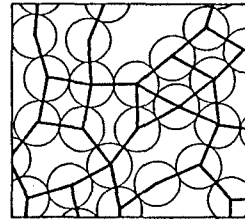


図-1 2次元粒状体モデル

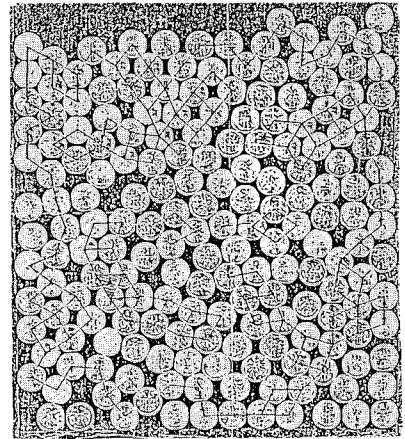


図-2 粒状体構造の実験例

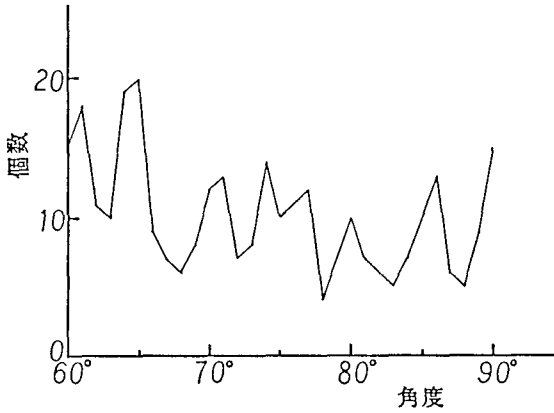


図-3 4角形要素の鋭角度の度数分布

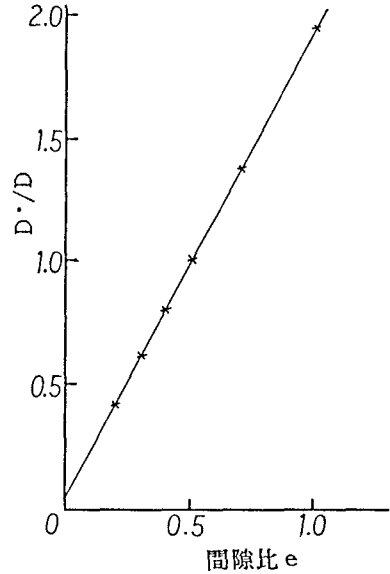


図-5 間隙比と平均間隙径の理論的關係

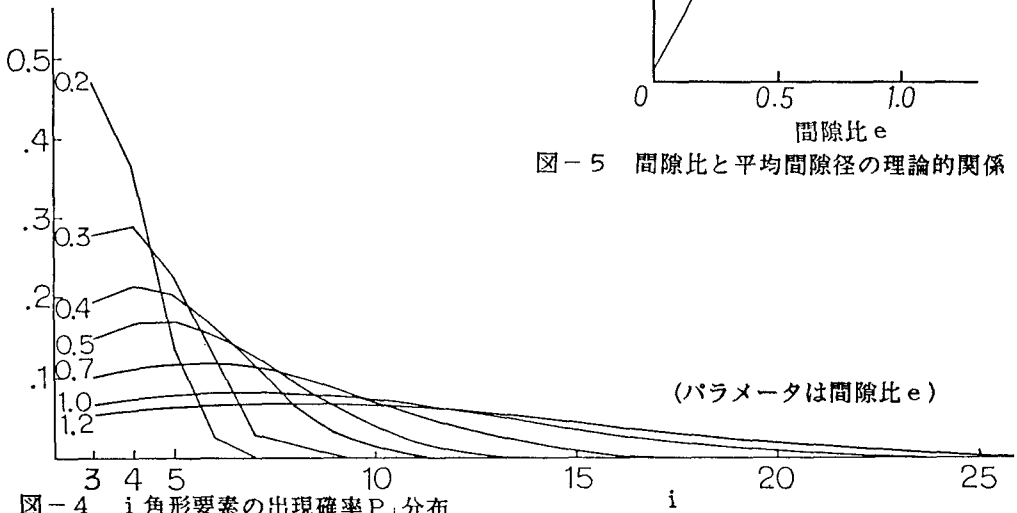


図-4 i 角形要素の出現確率 P_i 分布

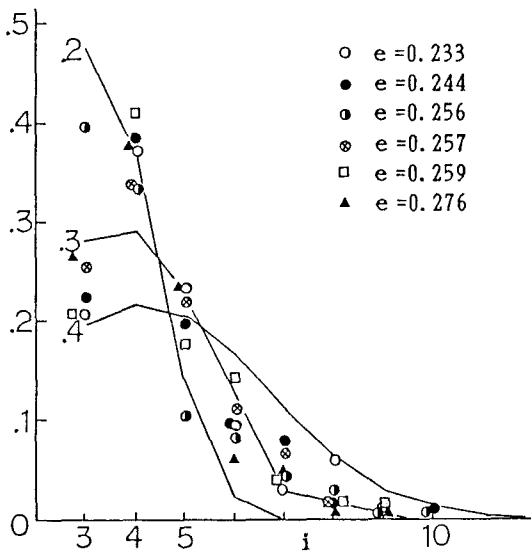


図-7 出現確率の理論値と実験値

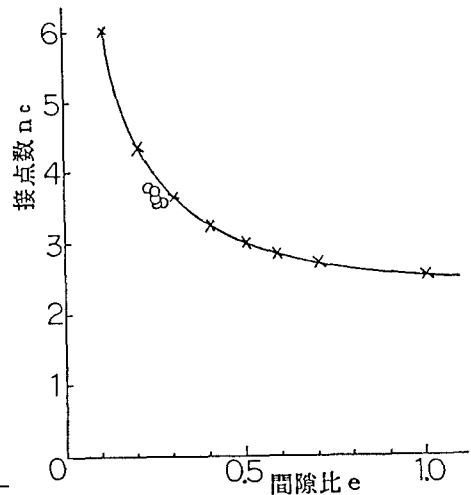


図-6 間隙比と平均接点数